Matemática Financiera para No Financieros

Brígida Jara L, Mónica Vargas J, Alexandra Solórzano G

Universidad Técnica de Machala

Matemática Financiera para no Financieros

Ing. César Quezada Abad, MBA
Rector

Ing. Amarilis Borja Herrera, Mg. Sc.
Vicerrectora Académica

Soc. Ramiro Ordóñez Morejón, Mg. Sc.
Vicerrector Administrativo

COORDINACIÓN EDITORIAL
VICERRECTORADO ACADÉMICO

Tomás Fontaines-Ruiz, PhD.
Investigador Becario Prometeo-Utmach
Asesor Del Programa De Reingeniería

Ing. Karina Lozano Zambrano
Coordinadora Editorial

Ing. Jorge Maza Córdova, Ms.
Ing. Cyndi Aguilar
Equipo de Publicaciones

Matemática Financiera para no Financieros

Brígida Jara López

Mónica Vargas Jiménez

Alexandra Solórzano González

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
2015

Primera edición 2015

ISBN: 978-9978-316-14-6

D.R. © 2015, UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
Ediciones UTMACH
Km. 5 1/2 Vía Machala Pasaje
www.utmachala.edu.ec

ESTE TEXTO HA SIDO SOMETIDO A UN PROCESO DE EVALUACIÓN POR PARES EXTERNOS CON BASE EN LA NORMATIVA EDITORIAL DE LA UTMACH.

Portada:
Concepto editorial: Jorge Maza Córdova
Diseño: Luis Neira Samaniego (Est. de U.A.C. Empresariales)

Diseño, montaje y producción editorial: UTMACH

Impreso y hecho en Ecuador
Printed and made in Ecuador

Advertencia: "Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, existente o por existir, sin el permiso previo por escrito del titular de los derechos correspondientes".

Índice

Capítulo I
Fundamentos Básicos de la Matemática Financiera 13
Definición de Matemática Financiera 13
Las Matemáticas Financieras en el Mundo de los Negocios 13
Valor del Dinero en el Tiempo 14
El Interés 15
Factores que Determinan la Cuantía del Interés 15
Tasas de Interés 16
Interés Simple e Interés Compuesto 16
Definición de Interés Simple 17
Características del Interés Simple 17
Clases 17
Forma de Cálculo 18
Ejemplo de Cálculo de Interés Simple en sus Cuatro Formas 18
Valor Futuro a Interés Simple 19
Valor Presente a Interés Simple 21
Cálculo de la Tasa de Interés Simple 22
Cálculo del Tiempo de Negociación 23
Interés Compuesto 24
¿Qué se Entiende por Capitalización? 24
Periodo de Capitalización 24
Valor Futuro a Interés Compuesto 25
Características del Interés Compuesto 26
Análisis de la Fórmula de Interés Compuesto 26
Valor Futuro con Tasa Variable 27

Valor Presente a Interés Compuesto 28
Valor Presente con Tasa Variable 30
Tasa de Interés Compuesta 31
Tiempo de Negociación 32
Misceláneas de Ejercicios del Capítulo..... 33

Capítulo II
Conversión de Tasas de Interés 35
Tasa Nominal y Efectiva 35
Tasa Nominal 35
Tasa Efectiva..... 35
Ecuación de la Tasa Efectiva 36
Diferencia entre Tasa Nominal y Tasa Efectiva..... 36
Tasa Periódica..... 37
Relación entre la Tasa Nominal, y la Tasa Periódica..... 37
Tasa Vencida 37
Tasa Anticipada 38
Tasa Equivalente..... 38
Miscelánea de ejercicios del capítulo 38

Capítulo III
Anualidades o Series Uniformes..... 41
Definición de una Anualidad, renta o pago periódico de renta.. 41
Condiciones para que una serie de pagos sea una Anualidad .. 42
Clases de Anualidades 42
Anualidad Vencida 43
Flujo de Caja de una anualidad Vencida..... 43
Valor Presente de una anualidad vencida 43
Fórmula para calcular el Valor presente de una anualidad vencida 43
Renta de anualidades vencidas en función de valor presente ... 45
Valor futuro o monto de una anualidad..... 46
Renta de anualidades vencidas en función de valor futuro..... 48
Anualidad Anticipada..... 53
Valor Presente o Actual de una Anualidad Anticipada..... 53

Valor Futuro o Monto de una Anualidad Anticipada 54
Anualidades Diferidas 55
Gradientes o Series Variables 56
Condiciones para que una serie de pagos sea un gradiente..... 56
Gradiente Aritmético, lineal o uniforme 56
Cálculo de los Gradientes Lineales 57
Fórmula para calcular valor presente de un gradiente aritmético creciente 57
Gradiente Aritmético descendente 59
Fórmula para calcular valor presente de un gradiente aritmético decreciente..... 59
Gradiente Geométrico o Exponencial 60
Gradiente Geométrico Creciente 60
Valor presente de un gradiente geométrico creciente..... 60
Fórmula para calcular valor presente de un gradiente geométrico creciente 61
Gradiente Geométrico Decreciente..... 62
Graficando lo podremos entender mejor 62
Fórmula para calcular valor presente de un gradiente geométrico decreciente..... 62
Miscelánea de ejercicios del capítulo 63

Capítulo IV

Amortización y Evaluación Financiera en los Proyectos de Inversión 65

Amortización, Sistema de amortización y composición de los pagos 65
Sistema de Amortización 65
Que es una Tabla de Amortización 66
Modelo de Tabla de Amortización 66
Como Calcular un Saldo Insoluto 67
Amortización con reajuste de la tasa de interés 70
Fondos de Amortización o de valor futuro..... 71
Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE) 72
Valor Presente Neto (VPN)..... 75

Tasa Interna de Retorno (TIR) 75
Miscelánea de ejercicios del capítulo 75

Bibliografía 77

Introducción

La Matemática Financiera siendo fuente de gran relevancia dentro del ámbito comercial, ya sea en operaciones financieras personales o corporativas es muy usual y necesaria al momento de requerir de cálculos que conduzcan a la toma fácil de decisiones donde se involucre una inversión.

Inspiradas en ello y enfocándonos en su utilidad del día a día para los pequeños y grandes financistas, quienes no precisamente son matemáticos, pero si requieren de cálculos financieros va dirigido el presente texto, cuyo principal objetivo es facilitar el entendimiento de su contenido e involucrarse en el proceso de cálculos de operaciones financieras básicas que los ayude en la toma de decisiones.

Para esto el desarrollo de sus capítulos es muy explícito y de fácil comprensión, el capítulo uno da a conocer conceptos básicos, entre ellos define a la matemática, cita su importancia, que es interés, su clasificación y ejercicios sobre cada uno de sus temas tratados.

En sucesión a lo expuesto anteriormente, el capítulo dos contiene todo lo referente a Tasas Nominal Efectiva, con sus respectivos ejemplos; el capítulo tres nos va involucrando ya en el conocimiento de lo que es Anualidades, como se clasifican, su cálculo con ejemplos, finalmente el capítulo cinco ya nos enseña a elaborar una tabla de amortización, determinar el Costo Anual Uniforme Equivalente, conceptos de Valor Presente Neto y Tasa Interna de Retorno.

Con la finalidad de fortalecer la comprensión de los capítulos, se incorpora una miscelánea de ejercicios de temas tratados en los mismos.

Las autoras

Capítulo I: Fundamentos Básicos de Matemáticas Financieras

Definición de Matemática Financiera

La matemática financiera tomando como base los cálculos aritméticos de la matemática básica y la lógica matemática, se nutre de herramientas financieras para contribuir al análisis y resolución de casos en el mundo de las finanzas.

Las Matemáticas Financieras en el mundo de los negocios

Las matemáticas financieras se constituye en un instrumento útil y necesario en el mundo de los negocios para tomar decisiones de inversión, puesto que su estudio se centra en el monto de dinero que se acumula en el transcurso del tiempo y sistemas de evaluación, acoplando varios factores importantes como son: el capital a invertir, la tasa de rendimiento, el tiempo en que se .ejecuta.

La matemática financiera es mayoritariamente práctica, es una herramienta básica en el mundo financiero ya que mediante la aplicación adecuada y necesaria de cualquiera de sus instrumentos proyecta resultados muy útiles para la toma de decisiones en el área financiera.

En la actualidad la matemática financiera es de mucha utilidad en todos los ámbitos sociales, ya sean personas naturales, pequeñas o grandes organizaciones quienes requieran de su aplicación para la toma de decisiones.

Valor del dinero en el tiempo

Meza (2011) se refiere al valor del dinero en el tiempo como aquel bien económico, cuya utilidad fundamental es generar más dinero. En tal sentido, señala que es el incremento que adquiere el dinero en un tiempo determinado, el mismo que se manifiesta a través del interés, es el incremento a un capital puesto en calidad de inversión en períodos de tiempo determinados. Por ello se concluye que vale más una cantidad de dinero en el presente que la misma cantidad en el futuro.

Comprender el significado del valor del dinero en el tiempo es muy importante en la Matemática Financiera, ya que se puede tomar mejores decisiones al momento de invertir, también se recomienda tener presente al momento de tomar la decisión de hacer una inversión el costo de oportunidad, que es saber elegir en si la mejor opción, siempre dejando de hacer otra.

Un ejemplo de valor en el tiempo: disponer de $1.000.000,00 el día de hoy y poder invertirlos en la compra de 1 hacienda, a diferencia de guardar esa cantidad durante 1 año, y en esa fecha hacer la misma compra. Podremos darnos cuenta que la cantidad de dinero ya no es la misma en relación al nuevo costo que tendrá la hacienda en ese tiempo. Aquí podemos darnos cuenta también la importancia del llamado costo de oportunidad, que es aquella oportunidad que se tiene al momento de tomar decisiones. Lo que se deja de hacer por lo que se elige es el costo de oportunidad, si revisan en el ejemplo de $1.000.000,00 gracias a esa decisión lo que se invierte a ganado valor.

.Según Meza (2011), el dinero….

> "……es un bien económico que tiene la capacidad intrínseca de generar más dinero. Este hecho lo puede constatar cualquier persona, por ejemplo, cuando deposita algún dinero en una cuenta de ahorros de una entidad financiera y después de algún tiempo al ir a retirarlo se encuentra con que sus ahorros han crecido, en forma mágica, al recibir una cantidad de dinero mayor.Por ese poder mágico de crecer que el tiempo le proporciona al dinero, debemos pensar permanentemente que el tiempo es dinero. Ahora, si la opción que se tiene es recibir $ 1.000.000 dentro de un año, se aceptaría solamente si se entregara una cantidad adicional que compense

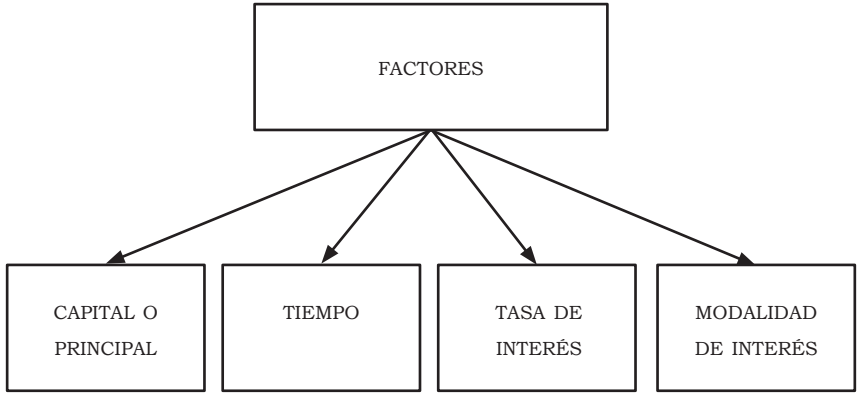
las razones anteriores. Este cambio en la cantidad de dinero en un tiempo determinado es lo que se llama valor del dinero en el tiempo y se manifiesta a través del interés.

El Interés

Villalobos (2012) entre una de sus definiciones nos dice que Interés es el pago por el uso del dinero ajeno, entendiéndose entonces como el valor que se suma a una cantidad base de la cual se da por lo general en inversiones financieras.

Flores (2011) entre tanto se refiere al interés como el rendimiento monetario que una persona puede recibir al dar en alquiler, también podría ser en préstamo cierta cantidad de dinero, esto dado a un tiempo determinado y a una tasa de interés establecida. El mismo que se representará con la letra (I).

Factores que determinan la cuantía del interés



Los principales agentes que determinan la cuantía del interés que se genera son:

• El Capital, factor principal que representa al dinero que interviene en una negociación, ya sea en la forma de un crédito o ahorro.

• El tiempo, representa la cantidad de períodos durante los cuales se generarán los intereses.

• La tasa de interés, es un porcentaje acordado en unidad de tiempo que se aplica a un capital.

• Modalidad del interés, se refiere a la forma que se aplicará en la negociación, es decir si será a interés simple o interés compuesto.

Tasas de interés

Señala Flores (2011) que la tasa de Interés es el valor que se reconoce por unidad de tiempo, expresado en porcentaje. Se representa con la letra (i).

Podemos decir también que tasa de interés es aquella cantidad expresada en forma porcentual que se acuerda en el momento de realizar una inversión ya sea ésta préstamo en valor efectivo o adquisición de algún bien en períodos de tiempo señalados.

Ejemplo:

Se adquiere un préstamo al Sr. Fidelin Castro por valor de $10.000,00, generándose $200,00 adicionales a este capital, estaríamos diciendo que nos cobrarán por interés la tasa del 2%, como lo veremos demostrando su cálculo:

C= $10.000, 00

I= $200, 00

$$i = \frac{\text{Interés Caudado}}{\text{Capital}}$$

$$i = \frac{200}{10{,}000.00} = 2\% \ (0{,}02)$$

Interés Simple e Interés Compuesto

Estos dos intereses, son los más utilizados en la vida práctica y el ámbito financiero.

Interés Simple.- Meza (2011), lo define como aquel en el cual los intereses que se devengan en un período, no generan más intereses en los siguientes períodos. Es decir su cálculo se lo realiza tomando únicamente como base el capital inicial, y de pagarse en cuotas este capital, el cálculo del interés será únicamente sobre el saldo que se queda adeudando.

Definición de Interés Simple

Según Meza (2011), define al interés simple como:

> "... aquel en el cual los intereses devengados en un período no ganan intereses en los períodos siguientes, independientemente de que se paguen o no. Únicamente sobre el capital principal se liquidan los intereses sin tener en cuenta los intereses precedentes causados. La liquidación de intereses se hace sobre el saldo insoluto, es decir sobre el capital no pagado".
> Acotando a la definición del autor anteriormente citado se puede decir que el Interés simple es aquel valor que resulta de calcular por una sola vez a un capital colocado ya sea en calidad de ahorro o préstamo en un tiempo determinado.

Características del interés simple:

Considerando la caracterización que Meza (2011) le da al interés simple, se puede enunciar lo siguiente:

• El capital inicial no varía durante el tiempo que dure la operación financiera, por cuanto los intereses no se capitalizan. Únicamente se cumple ésta condición en caso de mantenerse el capital, es decir que no se hagan abonos al mismo. De darse el caso de pagos sobre el capital inicial.

• Argumenta que acorde a la característica señalada anteriormente, la tasa de interés siempre será aplicada sobre el capital inicial o capital insoluto.

• Puede decirse por lo señalado que los intereses serán iguales siempre en cada periodo, salvo el caso de que existiesen abonos al capital principal entonces serían menores.

Clases

Flores (2011), menciona la unidad de tiempo normal es el año, el mismo que puede ser Comercial de 360 días, o exacto que es de 365 días.

De acuerdo a esto señala que hay dos formas de medir el tiempo:

a) Tiempo calculado en forma exacta o real, el que está tomado en concordancia con el calendario.

Con éste tiempo se puede calcular:

• Interés simple comercial con tiempo exacto

• Interés simple exacto con tiempo aproximado

b) Tiempo Exacto calculado en forma aproximada, tomando los meses de 30 días promedio).

Con éste tiempo se puede calcular:

• Interés simple exacto con tiempo exacto. • Interés simple comercial con tiempo aproximado

Forma de Cálculo

Su forma de cálculo será la siguiente:

I = P * i* n

Dónde:

I = El valor de los intereses

P = El capital inicial. Este no varía durante el tiempo que dure la operación financiera.

i = La tasa de interés pactada. Siempre se aplica sobre el mismo capital inicial y durante todo el tiempo que dure la inversión.

n = El tiempo que dura invertido el capital inicial."

Ejemplo de cálculo de Interés simple en sus cuatro formas:

Se requiere calcular el interés simple en las cuatro formas, de un capital de $ 300.000,00 colocado al 10% anual, durante el lapso de tiempo transcurrido desde el 15 de mayo al 15 de octubre del año 2015.

Datos:

Calcular el tiempo

Tiempo Exacto		**Tiempo Aproximado**	
15 – 31/ mayo	16 días	15 – 30/ mayo	15 días
01 – 30/ junio	30 días	01 – 30/ junio	30 días
01 – 31/ julio	31 días	01 – 30/ agosto	30 días
01 – 31/ agosto	31 días	01 – 30/ julio	30 días
01 – 15/ septiembre	15 días	01 – 15/ septiembre	15 días
	123 días		120 días

P = $ 300.000,00

i = 10 % / 100 = 0, 10

I =?

Desarrollo:

1.- Interés simple comercial con tiempo exacto

I = 300.000,00 ($\frac{0,10}{365}$) (120) =

I = 300.000,00 (0,0002739726027) (120) = 9.863,01

2.- Interés simple exacto con tiempo aproximado:

I = 300.000,00 ($\frac{0,10}{365}$) (123) =

I = 300.000,00 (0,0002777777778) (123) = 10.250,00

3.- Interés simple exacto con tiempo exacto.

I = 300.000,00 ($\frac{0,10}{365}$) (123) =

I = 300.000,00 (0,0002739726027) (123) = 10.109,59

4.- Interés simple comercial con tiempo aproximado:

I = 300.000,00 ($\frac{0,10}{365}$)(120) =

I = 300.000,00 (0,0002777777778) (120) = 10.000,00

Análisis de resultados:

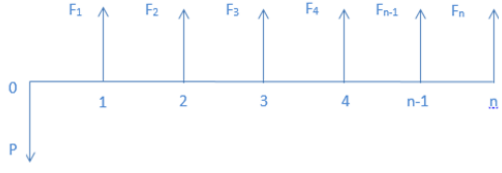
Vemos que el interés más alto esta dado en el segundo caso interés simple exacto con tiempo aproximado $10.250,00, y el más bajo en el primer caso interés simple comercial con tiempo exacto, $ 9.863,01.

Obtenidos estos resultados se puede decir que de ser el caso de recibir un crédito se escogerá el más conveniente que es el primer caso, y de ser el caso de una institución financiera que esté otorgando el crédito seguramente el interés más conveniente le ser el segundo caso.

Valor Futuro a Interés simple

Meza (2011) señala que consiste en calcular el valor futuro F, equivalente a un valor presente P, después de n periodos a una tasa de interés simple i. El valor futuro es igual al capital prestado más los intereses.

El flujo de caja es el siguiente:



Donde:

F = valor acumulado o valor futuro

P = Valor Inicial o Valor Presente

n = número de periodos

i = tasa de interés simple por periodo

Por lo tanto, el valor futuro equivalente de un valor presente dado, está dado por:"

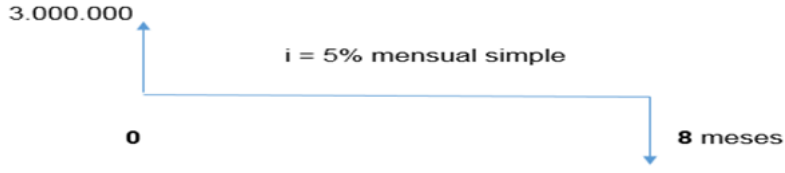
$$F = P(1 + ni)$$

Ejemplo:

¿Calcular cuál será el valor a cancelar dentro de 8 meses, por un préstamo recibido el día de hoy de $ 3.000.000,00, la tasa de interés es del 5% mensual simple?

Desarrollo:

1.- Flujo de caja



F =?

2.- Datos a resolver:

P = 3.000.000,00

n = 8 meses

i = 5 %

F = P (1 + n i)

F= 3.000.000,00 (1+8* 0,05)

F= 3.000.000,00 (1+0,4)

F= 3.000.000,00 (1,4)

F= 4.200.000,00

R= El valor a cancelar dentro de 8 meses con interés del 5%, es de $4.200.000,00

Valor Presente a Interés simple

Meza (2011) manifiesta que el valor presente a interés simple, consiste en calcular un valor presente P en un valor futuro F, ubicando n periodos adelante a una tasa de interés simple de i.(1+ni) se despeja el valor de P.

$$P=\frac{F}{(1+ni)}$$

Ejemplo:

Nikelin tiene que cancelar un valor de 7.800.000,00 dentro de 1 año. Si la tasa de interés es del 9% mensual simple. ¿Calcular cuál es el valor inicial de la deuda?

Datos a resolver:

P=?

F= 7.800.000,00

n= 1 año (12 meses)

i= 9% mensual

Como podemos observar la tasa de interés y el tiempo están dados en diferente unidad de tiempo, por lo que debemos convertir el año a meses.

$$P=\frac{F}{(1+ni)}$$

$$P=\frac{7.800.000,00}{(1 + 12 * 0,09)}$$

$$P=\frac{7.800.000,00}{(1 + 1,08)}$$

$$P=\frac{7.800.000,00}{(2,08)}$$

P= 3.750.000,00

R= El valor inicial de la deuda de Nikelin es de $ 3.750.000,00

Calculo de la tasa de interés simple

"Consiste en calcular la tasa de interés simple (i), que arroja una inversión inicial (P) y después de (n) periodos se recibe una cantidad acumulada (F)."

Partiendo de la expresión: F= P (1+ni)

Se tiene:

$$\frac{F}{P} = (1 + ni)$$

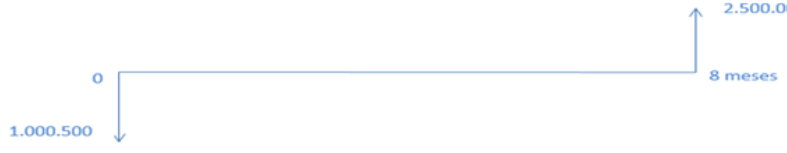
$$\frac{F}{P} - 1 = ni$$

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right]$$

Ejemplo:

Un ahorrista deposita el día de hoy en su cuenta $ 1.000.500,00 y en el lapso de 8 meses retira 2.500.000,00. ¿Cuál será la tasa de interés simple que gano?

1.- Flujo de caja:



2.- Datos a resolver:

P= 1.000.500,00

F= 2.500.000,00

n= 8 meses

i=?

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right]$$

$$i = \frac{1}{8}\left[\frac{2.500.000,00}{1.000.500,00} - 1\right]$$

$$i= \frac{1}{8} \left[2{,}498750625-1 \right]$$

$$i= \frac{1}{8} \left[1{,}498750625 \right]$$

$$i= 0{,}19 \times 100$$

$$i=19\%$$

R= La tasa de interés simple que gano el ahorrista es del 19%.

Calculo del tiempo de negociación

"Consiste en determinar el número de períodos (n), que se requieren para que una inversión inicial (P) a una tasa de interés simple de (i) produzca un valor futuro (F)." Flores (2011)

Partiendo de la expresión: F= P (1+ni)

Se tiene:

$$\frac{F}{P} = (1 + ni)$$

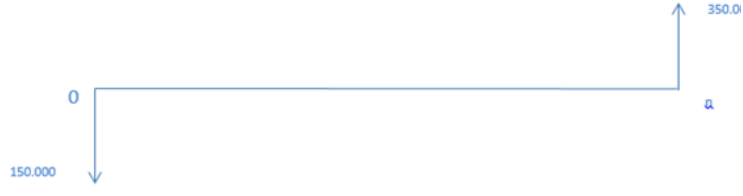
$$\frac{F}{P} - 1 = ni$$

$$n = \frac{1}{i} \left[\frac{F}{P} - 1 \right]$$

Ejemplo:

¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que un capital de $150.000,00 se incremente a 350.000,00, si se la coloco en ahorro al 5 % mensual simple?

1.- Flujo de caja:



2.- Datos a resolver:
F= $350.000,00
P= $150.000,00
n =?
i= 5% (0,05)

$$n= \frac{1}{i}\left[\frac{F}{P}-1\right]$$

$$n= \frac{1}{0,05}\left[\frac{350.000}{150.000}-1\right]$$

n=20(1,333333333)
n=26,67
R= Deberá transcurrir 26 meses para que el capital se incremente la cantidad deseada.

Interés Compuesto

Meza (2011) define al interés compuesto como aquel que al final del periodo capitaliza los intereses que se hayan causado en el periodo inmediatamente anterior, lo que comúnmente se lo percibe como interés sobre interés. Aquí el capital periodo a periodo va cambiando debido a que los intereses que se producen se van incrementando al capital y sobre éste se calcula el nuevo interés.

¿Qué se entiende por Capitalización?

Es un proceso a través del cual se le suma al capital anterior el valor de los intereses que se van causando periódicamente.

Periodo de Capitalización

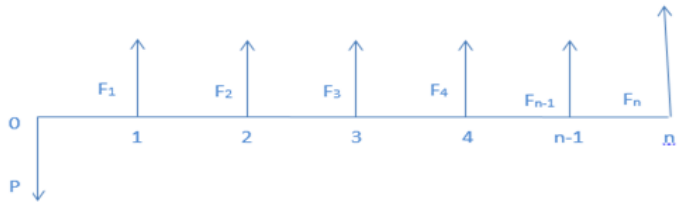
Se puede entender como el periodo pactado para convertir el interés en capital. Así, por ejemplo, existe capitalización diaria cuando al final de cada día los intereses generados se suman al capital. Al decir periodo de capitalización mensual se está indicando que al final de cada mes

se suman los intereses al capital anterior. Es importante establecer la diferencia entre periodo de capitalización y periodo de pago, porque no siempre coinciden. Los intereses se pueden causar diariamente y recibirse su pago al final del mes; en este caso el periodo de capitalización es diario y el periodo de pago mensual. Se suele mencionar el periodo de capitalización al expresar la tasa de interés de una operación financiera; en caso contrario se supone que la tasa de interés es anual.

Valor Futuro a interés Compuesto

El valor futuro a interés compuesto consiste en calcular el valor equivalente de una cantidad P como lo identifica al valor presente, luego de que éste ha ganado intereses en n periodos , a una tasa de interés i. (Meza, 2011)

Representación gráfica:



Donde:

F = Valor acumulado o valor futuro

P = Valor presente de la obligación

i = Tasa de interés periódica

n = Número de periodos

$(1+i)^n$ = Se lo conoce como "Factor de capitalización en pago único"

Por lo tanto dice Meza (2011), que la formula a aplicar para el cálculo del Valor Futuro equivalente a un valor presente está dado por:

$$F=P\ (1+i)^n$$

Explica que P en el día de hoy es equivalente a F dentro de n periodos, tasa i por periodo.

Características del interés compuesto

• "El capital inicial cambia en cada período porque los intereses que se causan se capitalizan, o sea, se convierten en capital.

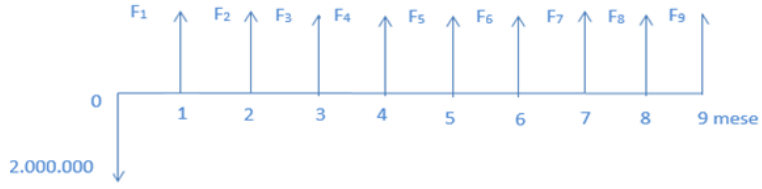
• La tasa de interés siempre se aplica sobre un capital diferente

• Los intereses periódicos siempre serán mayores.

Ejemplo:

Gasparin invierte $2.000.000,00 en el lapso de 9 meses en una financiera que le paga una tasa de interés del 7% mensual. Desea conocer cuánto dinero habrá acumulado al término del noveno mes?

1.- Flujo de caja:



2.- Datos a resolver:

P = $2.000.000,00

F =?

n = 9 meses

i = 7 % /100 = 0,07

Desarrollo:

$F=P\ (1+i)^n$

$F=2.000.000,00\ (1+0,07)^9$

$F=2.000.000,00\ (1,07)^9$

F=2.000.000,00 (1,838459212)

F=3.676.918,43

R = Al término del noveno mes Gasparin ha acumulado $ 3.676.918,43

Análisis de la fórmula de Interés Compuesto

Meza (2011) nos dice en este análisis que siendo la fórmula del interés compuesto la base para los cálculos financieros se debe conocer su

significado y limitaciones, por ello se describe dos condiciones en las que se basa:

$$F=P\ (1+i)^n$$

• Los intereses que se causan de un periodo a otro no se pagan, sino que se suman al capital anterior para formar un nuevo capital, es decir se capitalizan.

• Estos intereses que se generan periodo a periodo se reinvierten a la misma tasa de interés i.

Ejemplo:

Calcular el monto a interés compuesto de un capital de $ 8.000.000,00 colocado con una tasa de interés del 5%, en 11 meses.

Datos a resolver:

P = $ 8.000.000,00

n = 11 meses

i = 5% /100 = 0,05

F =?

Desarrollo:

$F=P\ (1+i)_N$

$F=8.000.000,00\ (1+0,05)^{11}$

$F=8.000.000,00\ (1,05)^{11}$

F=8.000.000,00 (1,710339358)

F=13.682.714,86

R = El monto en 11 meses asciende a $ 13.682.714,86.

Valor Futuro con Tasa Variable

La fórmula básica $F=P\ (1+i)^n$, presenta una importante limitación, ya que esta no se podría aplicar en el caso de reinvertirse los intereses y que su tasa no sea igual en los diferentes periodos. Cabe destacar que no siempre la tasa de interés para todos los periodos suele ser la misma.

De ahí que señala, la fórmula para calcular el valor futuro con interés compuesto, con tasa de interés diferente en cada periodo proyectado:

$$F=P\ (1+i_1\ )(1+i_2\ )\ \ (1+i_3\ )\ldots(1+i_n)$$

Donde:

F= Valor Futuro

P = Valor presente

i_1= Tasa de interés del primer periodo

i_2= Tasa de interés del segundo periodo

i_3= Tasa de interés del tercer periodo

Ejemplo:

Juliandra desea invertir $1,800.000, 00 en el tiempo de 9 meses. Le conceden una tasa inicial del 2 % mensual. La tasa de interés aumentará un 10%. Cuánto será el monto que recibirá al término de los 5 meses?

1.- Datos a resolver:

P = $ 1,800.000, 00

n = 5 meses

i^1 = 2% /100 = 0,020, i^2= 2, 20%/100=0,022, i^3= 2,40%/100=0,024, i^4= 2,60%/00=0,026, i^5= 2,80%/100=0,028,

F =?

Desarrollo:

F=1,800.000,00 (1+0,020)(1+0,022) (1+0,024)(1+0,028)

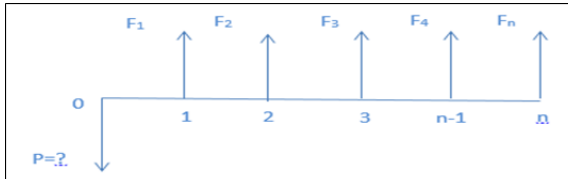
F=1,800.000,00 (1,020)(1,022) (1,024)(1,028)

F= 1.975.225,3

R = El monto que Juliandra recibirá al término de los 5 meses es de $ 1.975.225,32

Valor presente a interés compuesto

Consiste en calcular el valor P, equivalente hoy a una cantidad futura F, ubicada en n periodos adelante (en el futuro), considerando una tasa de interés compuesta i. Esta operación de calcular el valor actual de un capital equivalente a lo pagado en el futuro, se presenta con mucha frecuencia en los negocios y se conoce como el procedimiento para descontar la deuda.



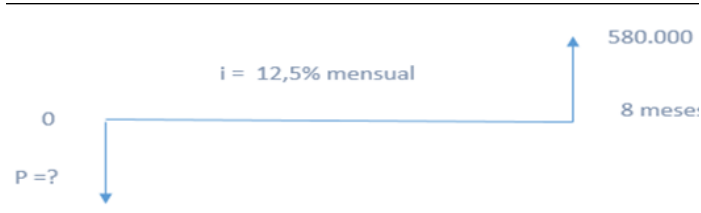
De la expresión: F=P (1+i)^n se despeja y obtiene la fórmula para calcular valor presente

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

Ejemplo:

Toby requiere la cantidad de $580.000,00 dentro de 8 meses, para realizar un viaje a las Islas Galápagos, una financiera le ofrece reconocer interés del 12,5% mensual, ¿calcular cuánto deberé depositar el día de hoy para realizar su viaje?

1.- Flujo de caja:



2.- Datos a resolver:

F = $580.000,00

n = 8 meses

i = 12,5 % /100 = 0,125

P =?

Desarrollo:

$$P=\frac{580.000,00}{(1+0,125)^8}$$

$$P=\frac{580.000,00}{(1,125)^8}$$

$$P=\frac{580.000,00}{2,565784514}$$

P= 226.051,72

R = Toby deberá depositar el día de hoy $ 226.051,72, para poder realizar su viaje como planea.

Valor presente con tasa variable

Meza (2011) señala que al igual que en el valor futuro con tasa variable, que en la vida practica los cálculos de valor presente no siempre se dan con tasa fija en los diferentes periodos, sino que suelen variar periodo a periodo, por ello no es en estos casos aplicable la fórmula: $F=P\ (1+i)^n$

En este caso la fórmula matemática a aplicar es:

$$P=\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n)}$$

Donde:

P = Valor Presente

F = Valor Futuro

i_1=Tasa del primer período

i_2=Tasa del segundo período

i_n=Tasa del n período

Ejemplo:

Un hacendado desea disponer de 3.000.000,00 dentro de 6 meses con la finalidad de financiar una maquinaria. Cuanto deberá depositar inicialmente para obtener lo que requiere, si le conceden las siguientes tasas de interés:

Mes	Tasa
1	0,15 %
2	0,20 %
3	0,25 %
4	0,30 %
5	0,35 %

1.- Datos a resolver:

F = $3.000.000,00

n = 6 meses

i = los antes señalados

P=?

Desarrollo:

$$P=\frac{3.000.000,00}{(1+0,0010)(1+0,0015)(1+0,0020)(1+0,0025)(1+0,0030)(1+0,0035)}$$

$$P=\frac{3.000.000,00}{(1,0010)(1,0015)(1,0020)(1,0025)(1,0030)(1,0035)}$$

$$P=\frac{3.000.000,00}{1,013573958}$$

P= 2.959.823,48

R= El hacendado deberá depositar inicialmente $2.959.823,48 para lograr su objetivo.

Tasa de interés compuesta

Según el autor Meza (2011) la tasa de interés compuesta es aquella que resulta de una cantidad invertida y la recibida después de un número de períodos determinado, dice además que de existir una única aplicando la ecuación básica cantidad invertida y una cantidad única recibida, se puede calcular por solución directa $F=P(1+i)^n$.

Ejemplo:

Manolo, el día de hoy invierte $ 100,00 y luego de 8 meses tiene un acumulado de $ 500,00, ¿A qué tasa de interés se ejecutó la operación?

1.- Flujo de caja:

2.- Datos a resolver:

P = $100,00

n = 8 meses

i =?

F= 500

Desarrollo:

$F=P\ (1+i)^n$.

$500 = 100\ (1+i)^8$

$\frac{500}{100} = (1+i)^8$

$2 = (1+i)^{21}$

Aplicando raíz:

$\sqrt[21]{2} = \sqrt[21]{(1+i)^{21}}$

$1{,}0393 = 1+i$

$1{,}0393 - 1 = i$

$i = 0393\ (100)$

$i = 39{,}3\ \%$

R = La operación se ejecutó con una tasa de interés del 39,9%

Tiempo de Negociación

Con frecuencia se hace una inversión inicial a una conocida tasa de interés con el propósito de obtener una cantidad futura determinada, y se desea conocer en cuanto tiempo se obtendrá esta cantidad futura. Desde el punto de vista matemático, se plantea el problema de la siguiente forma: conocidos el valor presente (P), el valor futuro (F) y la tasa de interés (i), se desea calcular el número de períodos (n).

Ejemplo:

Júpiter realiza un depósito de $ 300.000,00 hoy con un interés del 5% mensual, ¿Cuántos períodos deberán transcurrir para obtener 580.000,00?

1.- Flujo de caja:

2.- Datos a resolver:

P = $300.000,00

n =?

i =5% (0,05)

F= 580.000,00

Desarrollo:

$F=P\ (1+i)^n$.

$580.000,00=300.000,00\ (1+0,05)^n$.

$\frac{565.695,00}{300.000,00} = (1+0,05)^n$

$1,89 = (1+0,05)^n$

Por ser ésta una ecuación exponencial, que se resuelve aplicando logaritmo a ambos miembros de la igualdad

Log. 1,89 = Log 1.05

$$n=\frac{\log 1,89}{\log 1,05}$$

$$n=\frac{0,276461804}{0,021189299}$$

n=13,04

R= Deberán transcurrir 13 periodos.

Miscelánea de ejercicios del capítulo

1.- Si un préstamo de $50.000,00, genera por concepto de intereses el valor de $500,00. Se desea conocer cuál fue la tasa de interés que se concedió.

2.- Un crédito de $3.000,00, concedido al 3 % de interés simple anual y colocado a 210 días exactos:

a) Calcular el interés simple comercial, con tiempo exacto.

b) Interés simple exacto con tiempo exacto

3.- Con una tasa de interés del 8% mensual se adquirió un préstamo de $ 5.000,00, se desea saber al cabo de 12 meses cuanto será el valor total de la deuda.

4.- Zulay debe cancelar su deuda de $3.500,00 en 18 meses, la misma que le conceden un 9 % de interés simple mensual. Se desea saber cuál fue el valor anual de la deuda.

5.- Un granjero que hizo un ahorro el día de hoy por un valor de $ 8.000,00 y transcurridos 12 meses retira $ 12.000,00. Se desea conocer que tasa de interés le aplicaron al ahorro.

6.- Zulay decide depositar sus ahorros de $2.500,00 con el fin de obtener $5.000,00 aprovechando el interés que le ofrecen del 10 %

mensual. Se necesita conocer cuánto se debe esperar para recibir aquel monto.

7.- Un pequeño comerciante decide ahorrar el valor que obtuvo por ganancia en el año 2015, que fueron de $ 50.000,00 en una financiera que le ofrece el 3,5%de interés mensual. Cuánto recibirá al término de 12 meses

8.- Un arquitecto adquiere una maquinaria el día de hoy por valor de $ 3.600.000,00, la misma que decide comprarla por medio del sistema crédito a 11 meses, concediéndole una tasa de interés del 5% mensual. Se desea conocer el monto total de la deuda.

9.- Al término de 18 meses un odontólogo desea adquirir equipamiento para su clínica, para lo cual solicita cotización que arroja un costo de $5.000.000,00, decide ahorrar para ello en una institución financiera que le ofrece una tasa del 8% mensual. Cuanto es el valor que debería ahorrar mensualmente para obtener el valor deseado.

10.- Un capital de $1.500.000,00 colocado el día de hoy en una financiera que nos ofrece entregar al cabo de 15 meses la suma de $ 3.000,000,00. Se desea conocer cuál es la tasa de interés que nos conceden.

Capítulo II: Conversión de Tasas de Interés

Tasa nominal y efectiva

Tasa Nominal

Vidaurri, (2012), define a la tasa nominal, como aquella que se capitaliza en el año varias veces, esto acorde al periodo que se pacte.

La tasa nominal no es aquella que se utiliza o aplica directamente en una transacción financiera, sino que de acuerdo a la negociación se convierte a efectiva.

Es decir en el ámbito comercial, se utiliza únicamente como referencia la tasa nominal, puesto que en transacciones financieras se opera con la llamada tasa efectiva.

Tasa efectiva

Es la tasa que mide el costo efectivo de un crédito o la rentabilidad efectiva de una inversión. Y resulta de capitalizar o reinvertir los intereses que se causan cada período. Cuando se habla de tasa efectiva se involucra el concepto del interés compuesto, ya que ésta resulta de la reinversión periódica de los intereses, tal y como sostiene Meza (2011)

Cabe señalar de acuerdo al autor citado que el concepto de la tasa efectiva es aquella que como su nombre lo indica es aplicada efectivamente en el ámbito financiero ya que es la que nos demuestra claramente tanto a usuarios de crédito como financieras el verdadero costo de financiación.

Ecuación de la Tasa efectiva

Meza (2011) respecto a la ecuación de la Tasa Efectiva nos ilustra la siguiente formula, la cual nos permite realizar cálculo de equivalencias entre tasas de interés periódicas.

$$TE= (1+i)^n-1$$

Donde:

TE = Tasa Efectiva

i = tasa periódica

n = número de veces que se liquida la tasa periódica expresado en la tasa efectiva que se va a calcular.

(Meza Orozco, 2011, págs. 144,146)

Ejemplo:

Calcular cual ser´ la tasa efectiva que corresponde por un depósito pactado con un interés del 6,5% de interés anual capitalizable trimestralmente.

Datos a resolver:

i = 6,5 % capitalizable trimestralmente

$TE= (1+i)^n-1$

$TE= (1+0,01625)^4-1$

$TE= (1,01625)^4-1$

TE= 1,066601609-1

TE= 0,066601609

TE= 6,66%

R = La tasa efectiva de 6,5% trimestral es equivalente a la tasa del 6,66% anual

Diferencia entre Tasa Nominal y Tasa Efectiva

Al establecer diferencia entre estas dos tasas de acuerdo con los conceptos citados, podemos ver que una tasa nominal no es otra cosa que una tasa de interés simple, aquella que nos genera un interés sobre un capital el mismo que es liquidado al fin del período establecido, en

cambio la tasa efectiva es aquella que nos refleja la reinversión de los valores obtenidos por tal concepto, es decir se su suman al capital original y se continúan reinvirtiendo periodo a período.

Tasa Periódica

Tasa Periódica es aquella que se convierte en efectiva luego de convertirse o capitalizarse de acuerdo a la periodicidad que se decida pactar una inversión, puede ser anual, mensual, semestral, bimensual, trimestral o cuatrimestral.

Por ejemplo: 3 % capitalizable mensualmente, 5 % convertible semestralmente, etc.

Al referirnos entonces a tasa de interés periódica tengamos la visión clara de que nos estamos refiriendo a aquellas tasas que su aplicación va acorde al lapso de tiempo estipulado.

Relación entre la Tasa Nominal, y la Tasa Periódica.

Acorde a los conceptos citados anteriormente, puedo estipular que la Tasa Nominal y la Tasa periódica se relacionan directamente puesto que de una tasa de interés periódica se puede hacer el cálculo de una tasa de interés nominal, ya que únicamente tocaría multiplicar la tasa periódica por el número de períodos convenidos para el cálculo de la tasa nominal, por ejemplo: Si tenemos una tasa periódica estipulada de 5% trimestral, en un año la tasa será de 20% anual.

Tasa Vencida

Tasa vencida se denomina aquella que resulta de una operación financiera ya sea de cobro o pago, que ha sido acordada pagar al finalizar el periodo acordado.

Por ejemplo: Se adquiere una vehículo a tres años plazo, acordándose cancelar las cuotas al finalizar cada mes.

En el ejemplo se acuerda cancelar las cuotas al finalizar en este caso cada mes identificándose como tasa vencida.

Tasa Anticipada

Como su nombre lo indica, son todas aquellas que se pagan o cobran los intereses que se generan por anticipado, es decir al inicio del período que se pacte.

Ejemplo:

Si se recibe un préstamo de $ 500,00 dólares, pagadero al 6 % trimestral, de forma anticipada.

Esto significa que al momento de recibir el crédito solo me darán $470,00 por cuanto anticipadamente me están descontando ya la primera cuota de interés

Las tasas de interés anticipadas y vencidas, se diferencian claramente, ya que actúan de acuerdo a como se negocien, es decir si es anticipada el valor que resulte por concepto de interés será cobrado o pagado al inicio de la negociación, de manera que se verá disminuido el valor que sea negociado, difiriendo de las vencidas que el valor que se genere será así mismo cobrado o pagado al final de cada período pactado.

Tasa Equivalente

Dos tasas de interés son equivalentes cuando ambas, obrando en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual o el mismo valor futuro. Operan en condiciones diferentes cuando ambas capitalizan en períodos diferentes, o que una de ellas es vencida y la otra anticipada.

Dos tasas son equivalentes cuando al ser aplicadas teniendo la misma periodicidad pero con diferente conversión arrojan una misma respuesta en cuanto al interés.

Miscelánea de ejercicios del capítulo

1.- Ernesto realiza un depósito por el cual le conceden el 8% de interés anual pero su inquietud es saber cuál será la tasa efectiva que le aplican realmente, está en los casos siguientes:

a) si es convertible mensualmente

b) Si es convertible bimensualmente

c) si es convertible trimestralmente

d) Si es convertible semestralmente

2.- Convertir una tasa nominal de 16% anual, capitalizable semestralmente

Respuesta: 16,64 %

3.- Encuentre la tasa efectiva dada la tasa anual del 25%, capitalizable mensualmente.

Respuesta: 28,07%

4.- Dada la tasa nominal de 22% anual capitalizable bimensualmente, encontrar la tasa aplicable efectiva

Respuesta: 24,11 %

5.- De una tasa nominal anual de 16,5%, se desea conocer la tasa efectiva capitalizable trimestralmente

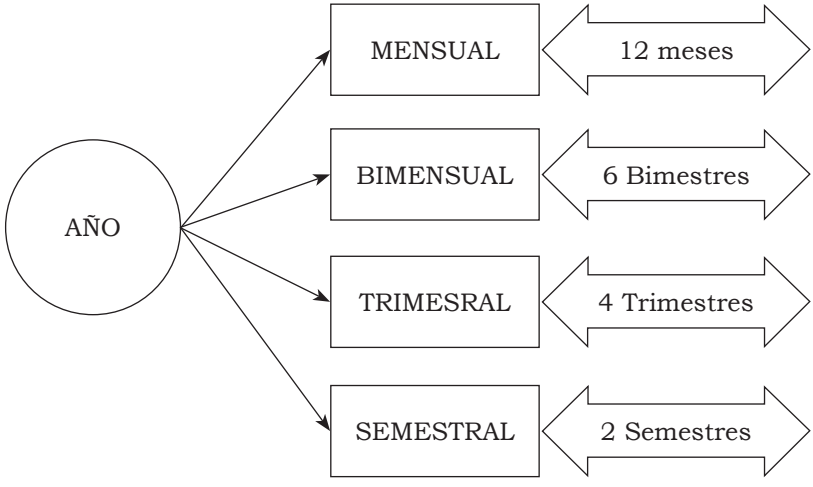
6.- Si nos conceden en un ahorro una tasa nominal del 1,5% anual, cual será nuestra tasa efectiva si se capitaliza mensualmente

Capítulo III: Anualidades o Series Uniformes

Definición de una Anualidad, renta o pago periódico de renta

Las Anualidades son una serie de pagos de igual valor que se realizan en períodos de tiempo igual y a una tasa de interés acordado.

Los intervalos de tiempo pueden ser:



Para fácil comprensión se define lo siguiente:

Renta, el valor del pago, abono, crédito, ahorro periódico que interviene en ésta operación financiera.

Período de Pago o Intervalo de tiempo, es aquel espacio de tiempo que transcurre entre un período a otro.

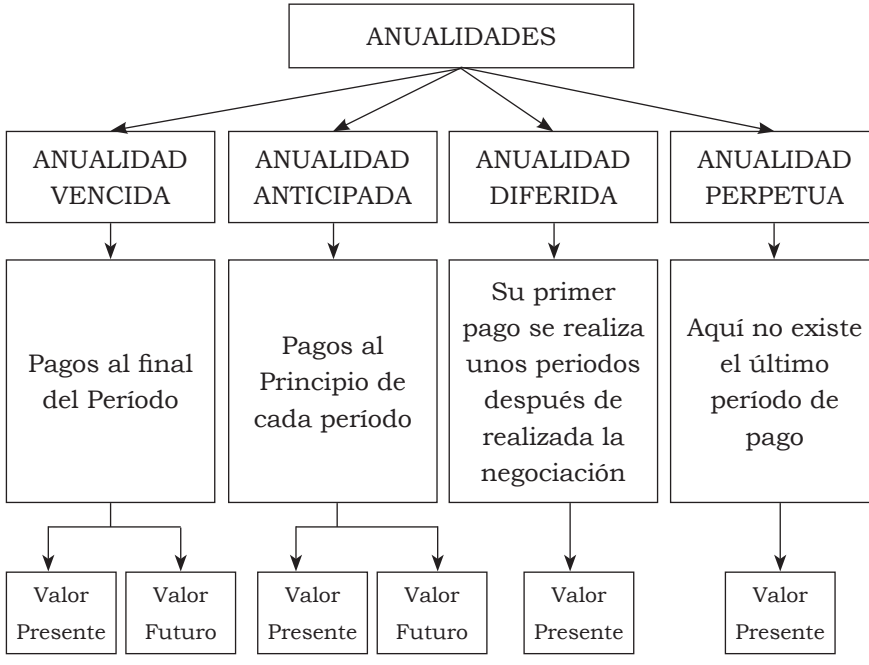
Plazo de la anualidad, es el lapso de tiempo que ha de transcurrir entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último pago de la negociación.

Condiciones para que una serie de pagos sea una Anualidad

Una serie de pagos se considera Anualidad si:

- El valor de las cuotas que paga o deposita son de igual valor.
- El tiempo en el que se invierten debe ser en periodos de tiempo iguales.
- Se establece el momento del pago que debe ser al inicio o final de cada periodo
- Los pagos y periodos deben se iguales.

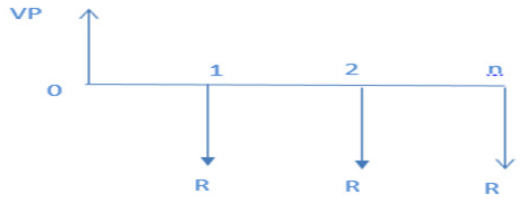
Clases de Anualidades



Anualidad Vencida

A una anualidad se la reconoce como vencida, porque sus pagos son al vencimiento del periodo acordado, el mismo que debe coincidir con el de capitalización. Ejemplo: Compra de bienes a crédito, pago de salarios, etc.

Flujo de Caja de una Anualidad Vencida



En el presente Flujo se puede ver VP que representa el valor inicial o Valor Presente, y R el valor de los pagos iguales y de forma periódica.

En una anualidad vencida encontramos valor presente y valor futuro.

Valor Presente de una Anualidad Vencida

Villalobos (2011), manifiesta que en las anualidades vencidas también llamadas ordinarias, para mejor entendimiento lo más común es asociar las rentas con su valor equivalente al inicio del período, es decir con su valor presente. Aquí las aplicaciones que más se dan son de amortización de deudas, como créditos por hipotecas, o cualquier otro cuya liquidación se haga a través de pagos periódicos y cargos de interés compuesto.

Fórmula para calcular el Valor presente de una anualidad vencida

$$VP = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Entiéndase:

VP = Valor presente o actual de la anualidad

R = El valor que represente e pago periódico o renta

i = Tasa de interés por periodo de capitalización

n = Representa el número de períodos de pago

Ejemplo:

Un empresario posee una deuda de 25 cuotas de $$38.000,00 a pagarse al final de cada semestre. Calcular el valor presente de la deuda, si esta posee una tasa de interés del 16 % capitalizable semestralmente.

Datos a desarrollar:

VP =

R = $38.000,00

i = 16% /100 = 0,16 / 2 = 0,08

n = 25 semestres

$$VP=38.000,00 \left[\frac{1-(1+0,08)^{-25}}{0,08}\right]$$

$$VP=38.000,00 \left[\frac{1-(1,08)^{-25}}{0,08}\right]$$

$$VP=38.000,00 \left[\frac{1-(0,853982095)}{0,08}\right]$$

VP=38.000,00 (10,67477619)

VP=405.641,49521

R= El valor presente total de la deuda es de $ 405.641,4

Ejemplo:

Al final de cada 2 meses, durante 6 años se paga una anualidad de 2.500,00. Se desea saber cuál es el valor en efectivo, si el interés que se paga es del 12%, convertible bimensualmente.

Datos a desarrollar:

VP =

R = $2.500,00

i = 12% /100 = 0,16 / 6 = 0,02

n = 6 años x 6 bimestres = 36 bimestres

$$VP=2.500,00 \left[\frac{1-(1+0,02)^{-36}}{0,02}\right]$$

$$VP=2.500,00\ \left[\frac{1-(1,02)^{-36}}{0,02}\right]$$

VP=2.500,00 [25,48884248]
VP=63.722,11

Renta de anualidades vencidas en función de valor presente

Así como podemos buscar el valor presente de una anualidad vencida, también podemos buscar el valor de renta o la anualidad misma, para ello despejamos R de la fórmula de valor presente y tenemos:

$$VP = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

De donde:

$$RP=\frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Ejemplo:

Un empresario posee una deuda de $ 580.000,00, a 5 años de plazo con una tasa de interés del 16 % capitalizable semestralmente, y desea saber cuánto debe pagar.

Datos a desarrollar:

RP =?
VP = $580.000,00
i = 16% /100 = 0,16 / 2 = 0,08
n = 5 años x 2 semestres = 10 semestres

$$RP=\frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$RP=\frac{580.000,00}{\frac{1-(1+0,08)^{-10}}{0,08}}$$

$$RP= \frac{580.000,00}{\frac{1-(1,08)^{-10}}{0,08}}$$

$$RP= \frac{580.000,00}{\frac{1-0,463193488}{0,08}}$$

$$RP= \frac{580.000,00}{\frac{0,536806512}{0,08}}$$

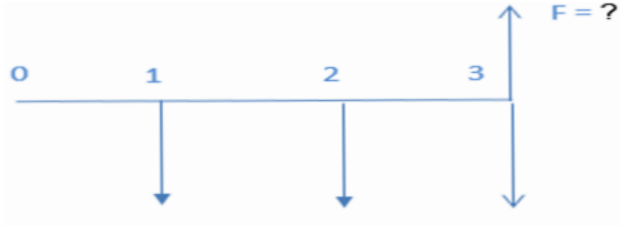
$$RP= \frac{580.000,00}{6,7100814}$$

RP = 86.437,10343

R = El empresario debe pagar semestralmente $ 86.427,10

Valor futuro o monto de una anualidad

El Valor futuro o Monto de una anualidad lo constituye la suma total generada en cada uno de los periodos convenidos siempre al final de los mismos.



La fórmula para el cálculo del valor futuro es:

$$VP = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Entiéndase:

VF = Valor futuro o monto de la anualidad

RP = El valor que represente el pago periódico o renta

i = Tasa de interés por periodo de capitalización

n = Representa el número de períodos de pago

Ejemplo 1

El Sr. Maximiliano luego de realizar durante 2 años depósitos trimestrales por valor de $ 200.000,00, con un interés de 16% capitalizable trimestralmente, desea conocer al final cuánto dinero tendrá acumulado?

Datos a desarrollar:

VF = ?

i = 16% /100 = 0,16 / 4= 0,04

n = 2 años x 4 trimestres = 8 trimestres

R = $ 200.000,00

Desarrollo

$$VF=200.000,00\left[\frac{(1+0,04)^{8}-1}{0,04}\right]$$

$$VF=200.000,00\left[\frac{(1,04)^{8}-1}{0,04}\right]$$

VF=200.000,00 (9,21422626)

VF=1.842.845,252

R = Sr. Maximiliano tendrá acumulado $ 1.842.845,252

Ejemplo 2:

Un artesano desea ampliar su taller mecánico, en el lapso de 1 año, para lo cual decide ir en busca de un banco el mismo que le ofrece el 3% de interés mensual, por sus ahorros, iniciando sus ahorros con un depósito de $ 200.000,00, al final de cada mes decide depositar $ 150.000,00. Sucede que recibe al finalizar el 8vo mes un dinero extra de $200.000,00, que también lo deposita en la misma cuenta. Cuánto habrá acumulado el artesano al finalizar el lapso de 1 año?

Datos a desarrollar:

VF = =?

VP = 200.000,00

CE = 200.000,00

i = 3% /100 = 0,16 12= 0,0025

n = 1 año x 12 meses = 12 meses

R = $ 150.000,00

Desarrollo:

VF=200.000,00 $(1+0.0025)^{12}$+150.000,00 $[\frac{(1+0,0025)^{12}-1}{0,0025}]$+200.000,00 $(1+0.0025)^{4}$

VF=200.000,00 $(1.0025)^{12}$+150.000,00 $[\frac{(1,0025)^{12}-1}{0,0025}]$+200.000,00 $(1.0025)^{4}$

VF = 200.000,00(1,030415957)+150.000,00(12,16638277)+200.000,00(1,010037563)

VF=206.083,1914+1.824.957,416+202.007,5126

VF=2.233.048,12

R = El artesano habrá acumulado $2.233.048,12

Renta de anualidades vencidas en función de valor futuro

Para conocer el valor de renta o cuota periódica en una anualidad vencida en función del valor futuro, se debe despejar R en la fórmula del valor futuro de anualidad vencida, como sigue:

$$VF = R \left[\frac{(1+i)^{n} -1}{i}\right]$$

$$RF= \frac{VF}{\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

Ejemplo:

Ciris, desea depositar en una cuenta de ahorros que le paga 1,5 % mensual, durante 3 años la cantidad de $3.000.000,00, para ello necesita saber qué cantidad debe depositar al final de cada mes, sabiendo que es capitalizable mensualmente.

Datos a desarrollar:

RF = =?

VF = 3.000.000,00

CE = 200.000,00

i = 1,5% /100 = 0,015/ 12= 0.00125

n = 3 año x 12 meses = 36 meses

Desarrollo:

$$RF=\frac{3.000.000,00}{\frac{(1+0,00125)^{36}-1}{0,00125}}$$

$$RF=\frac{3.000.000,00}{\frac{(1,00125)^{36}-1}{0,00125}}$$

RF= 81.524,46

R = Ciris deberá depositar $ 81.524,46 al final de cada mes para obtener $ 81.524,46

Cómo encontrar el número de periodos o n en una anualidad vencida, conociendo su valor presente

Conociendo el valor presente, la renta y tasa de interés, se puede aplicar la siguiente fórmula para encontrar n:

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{R}{R\text{-}VP\ (i)}\right)}{\text{Log}\ (1+i)}$$

Ejemplo:

Dixi, posee una deuda de $5.000,00, con un interés de 8% capitalizable semestralmente y está dispuesta hacer pagos de $ 1.000,00 cada semestre, ¿Cuántos pagos debe hacer para saldar esa deuda?

Datos a desarrollar:

RP = =$ 1.000,00

VP = 5.000,00

i = 8% /100 = 0,08/ 2= 0.04

n = =?

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{R}{R\text{-}VP\ (i)}\right)}{\text{Log}\ (1+i)}$$

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{1.000,00}{1.000,00\text{-}5.000,00(0,04)}\right)}{\text{Log}\ (1+0,04)}$$

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{1.000,00}{1.000,00\text{-}200,00}\right)}{\text{Log}\ (1,04)}$$

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{1.000,00}{800,00}\right)}{\text{Log}\ (1,04)}$$

$$n=\frac{\text{Log}\ (1,25)}{\text{Log}\ (1,04)}$$

$$n=\frac{0,096910013}{0,017033339}$$

n= 5,69

R= 5,69 semestres

Tomando como resultado sin redondear 5 semestres, vemos que se debe reajustar el último pago, o pagarse un período después la diferencia.

$$5.000,00 = 1.000 \frac{1 - (1+0,04)^{-5}}{0,04} + x$$

$$5.000,00 = 1.000 \frac{1 - (1,04)^{-5}}{0,04} + x$$

$$5.000,00 = 1.000\ (4,451822331) + x$$

$$5.000,\ 00 = 4.451,822331 + x$$

$$X = 548,177669$$

Lo que significa que éste valor se debe sumar a el último pago o hacer uno adicional por este valor.

Cómo encontrar el número de periodos o n en una anualidad vencida, conociendo su valor futuro.

Conociendo el valor futuro, la renta y la tasa de interés, fácilmente se puede encontrar el número de períodos, esto aplicando la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\text{Log } \frac{VF(i)}{R} + 1}{\text{Log } (1 + i)}$$

Ejemplo:

Adris, empresaria exitosa desea saber cuántos depósitos de $500.00,00 debe realizar al finalizar cada semestre, en una financiera que le ofrece un interés del 16% capitalizable semestralmente si anhela retirar $2.800.000,00

Datos a desarrollar:

RF = =$ 500.000,00

VF = 2.500.000,00

i = 16% /100 = 0,16/ 2= 0.08

n = ?

Desarrollo

$$n = \frac{\text{Log } \frac{VF(i)}{R} + 1}{\text{Log } (1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log } \frac{2.500.000,00(0,08)}{500.000,00} + 1}{\text{Log } (1 + 0,08)}$$

$$n = \frac{\text{Log } 1,4}{\text{Log } (1,08)}$$

$$n = \frac{0,146128035}{0,033423755}$$

$$n = 4,37$$

Cabe señalar que se debe tomar n = 4 períodos y realizar el cálculo de encontrarse diferencia se debería reajustar el ultimo deposito como recomendación.

Como veremos:

$$VF = 5000.000,00 \left[\frac{(1+0,08)^4 - 1}{0,08}\right]$$

$$VF = 5000.000,00 \left[\frac{(1,08)^4 - 1}{0,08}\right]$$

$$VF = 5000.000,00 \ (4,506112)$$

$$VF = 2.253.056$$

En él presente ejemplo como podemos ver los 4 depósitos suman $2.253.056, faltando una diferencia de $246.944,00, la cual se sugiere se reajuste en el último depósito

Calculando así:

$$2.500.000,00 = 500.000,00 \ \frac{(1+0,08)^4 - 1}{0,08} + x$$

$$2.500.000,00 = 500.000,00\ (4,506112) + x$$

$$2.500.000,00 = 2253.056 + x$$

$$X = 246.944,00$$

Anualidad Anticipada.

Las anualidades anticipadas, son aquellas que como su nombre lo indica sus pagos se hacen al empezar cada periodo.

Dentro de lo que es una anualidad anticipada tenemos: Valor Futuro o monto y Valor Presente o actual

Valor Presente o Actual de una Anualidad Anticipada.

El valor presente o actual de una anualidad anticipada se lo calcula considerando como fecha focal el inicio del pago o deposito.

La fórmula para su cálculo está dada por:

$$VPA = R \left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

Donde:

VPA = Valor presente Anticipada

R = Valor de la renta o anualidad

I = tasa de capitalización

n = periodos de capitalización

Ejemplo

Textilera S.A. realiza pagos iniciando cada mes por valor de $5.000.000,00 con una tasa de interés del 15,6 % anual, capitalizable mensualmente durante 5 años. El Sr. Gerente desea saber cuánto habrá pagado.

Datos a desarrollar
VP =?
R = 5.000.000,00
i = 15,6% /100 = 0,156/12= 0,013
n = 5 años (5 x 12 meses) = 60 meses
Desarrollo

$$VPA = 5000.000,00 \left[1+ \frac{1-(1+0,013)^{-60+1}}{0,013} \right]$$

$$VPA = 5000.000,00 \left[1+ \frac{1-(1,013)^{-59}}{0,013} \right]$$

$$VPA = 5000.000,00 \left[1+ \frac{0,533294709}{0,013} \right]$$

VPA=5.000.000,00 [1+ 41,02266998]

VPA=5.000.000,00 [42,02266998]

VPA=210.113.349,9

R =Jaspier S.A. habrá obtenido originalmente su deuda por $ 210.113.349,90

Valor Futuro o Monto de una Anualidad Anticipada.

Lo constituyen el total de todos los pagos o depósitos que se realicen, a un periodo determinado.
Su fórmula de cálculo es:

$$VFA = R(1+i) \left[\frac{(1+i)^n-1}{i} \right]$$

Donde:

VFA = Será el valor futuro de la anualidad anticipada

R = Renta

i = La tasa de interés que se considera para el periodo de pago

n = Los períodos que se establecen para su capitalización.

Ejemplo

Cuanto habrá acumulado, Jaspier S.A. en 3 años, si al principio de cada trimestre realizo depósitos de $1.600.000,00 al 18% de interés capitalizable trimestralmente.

Datos a desarrollar:

VF =?

R = 1.600.000,00

i = 18% /100 = 0,18/4= 0,045

n = 3 años (3 x 4 trimestres) = 12 trimestres

Desarrollo

$$VFA = 1.600.000,00(1+0,045)\left[\frac{(1+0,045)^{12}-1}{0,045}\right]$$

$$VFA = 1.600.000,00(1,045)\left[\frac{(1,045)^{12}-1}{0,045}\right]$$

$$VFA = 1.672.000,00\left[\frac{0,695881432}{0,045}\right]$$

VFA=1.672.000,00 (15,46403184)

VFA=25.855.861,24

R = Jaspier S.A habrá acumulado en 12 trimestres la suma de $ 25.855.861,24

Anualidades Diferidas

Según Flores (2011) son aquellas que comienzan después de que transcurre un intervalo de tiempo. Por la forma que se presentan no es necesario desarrollar nuevas fórmulas para resolver problemas de anualidades diferidas, ya que este tipo de situaciones generalmente se estudian como anualidades vencidas.

Considerando al autor citado, las anualidades diferidas son aquellas que estando pactados sus periodos de pago en la negociación, por algún motivo el inicio de sus pagos o depósitos se pospone a realizarse uno o dos períodos o como se llegue al acuerdo, este caso se da por ejemplo: cuando ciertos almacenes de electrodomésticos u concesionarias automotrices colocan sus promociones donde realizan la negociación de la venta el momento que entregan el bien o servicio y los pagos los dan con los llamados meses de gracia que oscilan por lo general de 1 a 3 meses o los que se acuerde.

Cabe señalar que las formulas a utilizarse para su cálculo ya sea valor presente o valor futuro serán las mismas de las anualidades vencidas, con el único detalle de interpretar los periodos que se difieren.

Gradientes o Series Variables

Ahora bien, en cuanto a los Gradientes o series variables es una serie de pagos que se realizan en iguales intervalos de tiempo, y varían en cuanto a su valor ya que aumentan o disminuye a medida que se dan, esto acorde a con una norma establecida. (Flores Uribe, 2011)

Se conoce dos clases de gradientes: el aritmético, lineal o uniforme y el gradiente geométrico.

Condiciones para que una serie de pagos sea un gradiente

- Obedecer a su ley de formación: incrementan o decrecen
- El tiempo que se establece para cada uno de sus pagos debe darse de forma periódica.
- Sus pagos deben establecerse en unidad de tiempo presente o futuro

El número de periodos y el número de pagos deben de darse iguales..

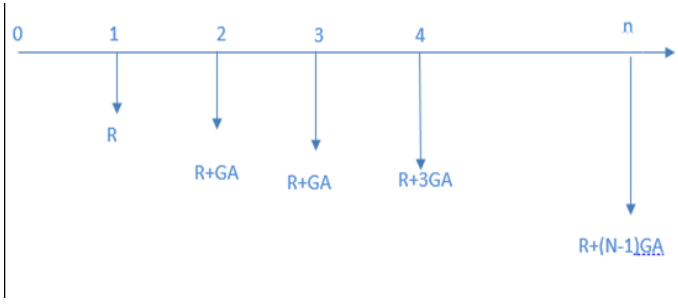
Gradiente Aritmético, lineal o uniforme

Este gradiente, constituye una serie de pagos iguales en sus períodos, pero de valores que se incrementan o disminuyen al anterior en igual cantidad en los pagos o deudas posteriores.

Como señala Flores (2011), en éste gradiente cada pago es igual al anterior, más o menos una constante. Si la constante es positiva, el gradiente es creciente; si la constante es negativa el gradiente es decreciente.

Para un mejor entendimiento veamos las gráficas siguientes:

Gradiente Aritmético ascendente



Cálculo de los Gradientes Lineales

Los gradientes al igual que las anualidades pueden ser de forma vencida o anticipada, suelen presentarse con más frecuencia como vencidos, cuando se trata de un gradiente creciente nos encontramos con GA positiva, y lo contrario GA negativa

Fórmula para calcular valor presente de un gradiente aritmético creciente

Al proceder hacer éste cálculo debemos considerar que se trata de la suma de todos los pagos que periodo a periodo se incrementan una cantidad constante.

Su fórmula es la siguiente:

$$VP=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{GC}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{n}{(1+i)^n}$$

Donde:

VP = Valor presente del gradiente

R = Valor de la primera cuota

GC = Es la constante en que incremente cada cuota

n = número de pagos o depósitos

i = interés con el que se opera

Ejemplo

Un hacendado adquiere una maquina podadora de césped, en 12 cuotas mensuales, de tal manera que el primer periodo paga $200.000,00, y a partir de éste cada pago se irá incrementando mensualmente $ 20,000,00, el interés es del 5 % mensual, cual es el valor de la maquina?

Datos a desarrollar:

GVP=?

R = $ 200.000,00

i = 5% /0,05

n = 12 meses

GC = $20.000,00

Desarrollo

$$VP=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{GC}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{n}{(1+i)^n}$$

$$VP=2000.000,00\left[\frac{(1+0,05)^{12}-1}{0,05(1+0,05)^{12}}\right]+\frac{20.000,00}{0,05}\left[\frac{(1+0,05)^{12}-1}{0,05(1+0,05)^{12}}\right]-\frac{12}{(1+0,05)^{12}}$$

$$VP=2000.000,00\left[\frac{0,795856326}{0,08979281116}\right]+400.000,00\left[\frac{0,795856326}{0,08979281116}\right]-\frac{12}{1,795856326}$$

VP=200.000,00 (8,863252144)+ 400.000,oo (8,863252144)- 6,682049018

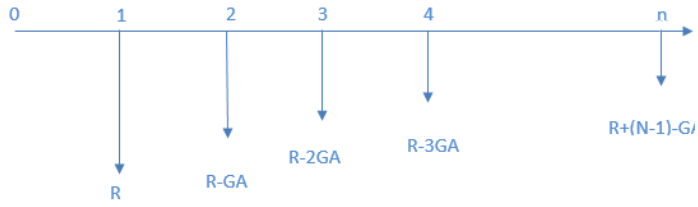
VP=1.772.650,43+ 3.545.301,26- 6,682049018

VP=5.317.951,69- 6,682049018

VP=5.317.945,01

R = Es equivalente a que el hacendado cancele hoy $5.317.945,01

Gradiente Aritmético descendente



Fórmula para calcular valor presente de un gradiente aritmético decreciente

Como se ve en la gráfica, este gradiente ubicado en tiempo presente, al ser decreciente su característica es que disminuye cada periodo en una cantidad constante respecto del anterior, esto siempre a partir del segundo pago o depósito.

$$VP=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{GC}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{n}{(1+i)^n}$$

Donde

VP = Valor presente del gradiente

R = Valor de la primera cuota

GD = Es la constante en que disminuye cada cuota

n = número de pagos o depósitos

Ejemplo

Una gran maquinaria se está pagando con 24 cuotas mensuales que disminuyen mensualmente $5.000,00 y su primera cuota es de $150,000,00 con un interés del 8% mensual. Se desea conocer el valor total de la maquinaria.

Datos a desarrollar

GVP=?

R = $ 150.000,00

i = 8% /0,08 mensual

n = 24 meses

GD = $5.000,00

Desarrollo

$$VP=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{GC}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]-\frac{n}{(1+i)^n}$$

$$VP=150.000,00\left[\frac{(1+0,08)^{24}-1}{0,08(1+0,08)^{24}}\right]-\frac{5.000,00}{0,08}\left[\frac{(1+0,08)^{24}-1}{0,08(1+0,08)^{24}}\right]-\frac{24}{(1+0,08)^{24}}$$

$$VP=150.000,00\left[\frac{5,3421180737}{0,507294459}\right]-\frac{5.000,00}{0,08}\left[\frac{5,3421180737}{0,507294459}\right]-\frac{24}{6,341180737}$$

VP=150.000,00 (10,530606)- 62.500,00(10,530606)- 3,784784095

VP=1.579.590,9-658.162,88- 3,784784095

VP=921.424,24

R = El costo de la maquinaria hoy es de $ 921.424,24

Gradiente Geométrico o Exponencial

A diferencia del gradiente aritmético o lineal, éste su incremento o disminución lo hace de forma porcentual fija en cada período, siempre a partir del que le antecede.

Gradiente Geométrico Creciente

Aquí también tenemos valor presente de un gradiente geométrico creciente y decreciente.

Valor presente de un gradiente geométrico creciente

Cuando éste se encuentra en tiempo presente, se incrementan de un periodo a otro en relación al anterior en una cantidad porcentual fijo.

Fórmula para calcular valor presente de un gradiente geométrico creciente

$$VPGGC=R\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]$$

Donde:

VPGGC = Valor presente gradiente geométrico creciente

R = valor de la primera cuota

g = variación porcentual de la cuota en relación a la anterior

i = tasa de interés con la que se opera

n = número de períodos de pagos o abonos en una operación financiera

Ejemplo:

El Sr. Sua está cancelando una deuda la cual hace un abono inicial de $3.000,00 y 12 cuotas de $500.00 mensuales las mismas que se van incrementando mes a mes en un 3 %, siendo la primera de $1.000,00, Se pide calcular el valor de la obligación.

Datos a desarrollar:

C = $ 3.000,00

VPGGC=?

R = $ 1.000,00

i = 3% /0,03 mensual

n = 12 meses

g = 5%

Desarrollo:

$$VPGGC=3.000+1000.00\left[\frac{(1+0,05)^{12}-(1+0,03)^{12}}{(0,05-0,03)\ (1+0,03)^{12}}\right]$$

$$VPGGC=3.000,00+1000.00\left(\frac{(1+0,05)^{12}-(1+0,03)^{12}}{(0,05-0,03)\ (1+0,03)^{12}}\right)$$

VPGGC=3.000,00+1.000,00 (12,97887507)

VPGGC=3.000,00+12.978.88

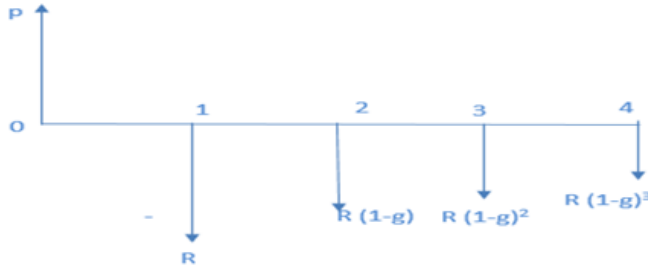
VPGGC=15.978.88

R = El valor de la obligación del Sr. Sua asciende a $ 15.978,88

Gradiente Geométrico Decreciente

Son una serie de desembolsos o ingresos de valores, que van disminuyendo periódicamente, respecto al periodo anterior, esta disminución se da en forma porcentual fija.

Graficando lo podremos entender mejor:



Fórmula para calcular valor presente de un gradiente geométrico decreciente

Al hablar de valor presente de gradiente geométrico decreciente se entiende que se encuentra ubicado en un periodo antes del al del primer pago.

Su fórmula:

$$VPGGD=R\left[\frac{(1+i)^n-(1+g)^n}{(g+i)(1+i)^n}\right]$$

Donde:

VPGGD = Valor presente gradiente geométrico decreciente

R = valor de la primera cuota

g = variación porcentual de la cuota en relación a la anterior

i = tasa de interés con la que se opera

n = número de períodos de pagos o abonos en una operación financiera

Ejemplo:

Efectuar el cálculo correspondiente a una deuda de 12 pagos semestrales, cuyo primer pago es de $1.500,00 y los subsiguientes van disminuyendo en un porcentaje de 3% fijo cada periodo., el interés es del 18%.

Datos a desarrollar:

VPGGD=?

R = $ 1.500,00

i = 18% /0, 03 semestral

n = 12 semesters

g = 3%

Desarrollo:

$$VPGGC=1.500,00\left[\frac{(1+0,18)^{12}-(1+0,03)^{12}}{(0,03+0,18)\ (1+0,18)^{12}}\right]$$

$$VPGGC=1.500,00\left[\frac{(1,18)^{12}-(1,03)^{12}}{(0,21)\ (1,18)^{12}}\right]$$

$$VPGGC=1.500,00\left[\frac{7,287592625-1,425760887}{1,530394451}\right]$$

$$VPGGC=1.500,00\left[\frac{5,861831738}{1,530394451}\right]$$

$$VPGGD=1.500,00(3,830275086)$$

$$VPGGC=5.745,41$$

R = La deuda es de $ $5.745,41

Miscelánea de ejercicios del capítulo

1.- Josep adquiere un vehículo por el cual deposita $ 5.000,00 y 36 cuotas de $500,00 cada una, con un interés del 22% anual capitalizable mensualmente, cual es el valor al momento de la negociación.

2.- Un médico desea realizar un posgrado en una universidad de Lima, el mismo que demanda de un desembolso de $35.000,00 a la presente fecha. Razón por la cual decide hacer un préstamo por el mencionado valor pactando un lapso de 6 años 6 meses, por el cual paga un interés del 16%anual capitalizable mensualmente, se desea saber cuánto le toca debe cancelar por cuota.

3.- El señor Landívar desea hacer un ahorro de $580.00 mensuales durante 10 años con la finalidad de en lo posterior poder financiar los estudios de su único hijo, un financista le ofrece una tasa de interés del 15% anual capitalizable semestralmente. El mencionado señor desea saber cuál será el monto que finalmente recibirá.

4.- A cuanto equivale una deuda si se hacen pagos iguales de $ 2.000,00 por el lapso de 4 años a una tasa de interés del 18 % capitalizable semestralmente.

5.- Se necesita conocer cuántos depósitos de $ $500.000,00 se deben realizar para lograr ahorrar la cantidad de $6.000.000,00 en períodos semestrales donde nos conceden el 12% de interés semestral.

6.- Juanjo realiza al iniciar cada periodo la cantidad de $ 60.000,00 en una financiera que le paga el 9% de interés capitalizable trimestralmente. Se requiere saber que monto habrá reunido en el lapso de 5 años.

7.- Malibú posee una deuda por la cual efectúa pagos al inicio de cada periodo, deuda que fue adquirida con el 8% de interés capitalizable bimestralmente. Se requiere conocer cuál es la deuda total si se hace en 3 años.

8.- Un ciudadano necesita saber a cuánto asciende su deuda total por un vehículo que adquirió en su totalidad financiado y se hizo el trato de la siguiente manera:

18 cuotas mensuales de $650.00 la primera, y las subsiguientes a partir de la segunda con un incremento sucesivo de $ 100,00 cada una hasta culminar las cuotas. Con un interés efectivo mensual de 3%.

9.- calcular el valor total de una obligación económica que fue negociada de la manera siguiente:

10 cuotas semestrales la primera de $100.000, 00 y a partir de la segunda cada una tendrá un decremento de $200,00, su interés fue acordado en 6% efectiva anual.

10.- Marian adquirió una deuda comprometiéndose a cancelarla en 12 pagos que serán el primero de $1.500,00 y a partir del segundo se irán incrementando sucesivamente en un 6%. Cabe señalar que se negoció con un interés de 3% efectivo Conociendo sus condiciones calcular el

Capítulo IV: Amortización y Evaluación Financiera en los Proyectos de Inversión

Amortización, Sistema de amortización y composición de los pagos

"La amortización a criterio de Meza (2011) es, desde el punto de vista financiero, el proceso de pago de una deuda y sus intereses mediante una serie de cuotas (periódicas o no), en un tiempo determinado. La palabra amortización proviene del latín mors, que significa muerte, por lo tanto, la amortización es el proceso con el que se "mata" una deuda."

A mi criterio amortizar es el sistema ordenado de poder ir realizando la liquidación de una obligación financiera contraída, en la cual se ve reflejado desde el capital inicial, los intereses y tiempo convenidos con mayor claridad, también nos permite conocer en cualquier período el valor que hemos cancelado y el que aún se adeuda.

Sistema de Amortización

En cuanto al sistema de amortización este autor manifiesta que para establecerlo, se debe tener claro:

- Cuál es el valor de la deuda?, es decir el valor que se concederá ya sea por préstamo o por pago de algún bien
- Lapso de tiempo acordado para la deuda, se refiere al tiempo en períodos con los que se definirá el pago o extinción de una deuda
- Valor que se generará por intereses en la financiación, esto como es sabido en el ámbito financiero por todo valor que se conceda en

préstamo o crédito, se generará un valor equivalente al porcentaje de interés que se ofrezca.

• Forma de los pago de las cuotas, se refiere si éstos serán de acuerdo a lo que se pacte mensual, bimensual, trimestral, semestral, anual.

Referente a la composición de los pagos, estos constan generalmente de una parte que es el interés y otra que es el abono al capital.

Que es una Tabla de Amortización

Cuando se acuerda un plan de amortización al adquirir o conceder una deuda, también puede ser el caso de ir acumulando fondos a una fecha establecida. En cualquiera de los casos es necesario diseñar una tabla de amortización, la cual refleja periodo a periodo como va evolucionando el pago de un crédito o también la forma como vamos construyendo un ahorro futuro.

Modelo de tabla de amortización

Se sugiere deba contener al menos:

No. Periodos	Capital insoluto $	Interés Vencido $	Renta periódica $	Capital Devengado $	Saldo final del periodo $

Donde:

No. Períodos. – Describirá cada uno de los períodos acordados

Capital Insoluto.- Se refiere aquella parte o saldo de la deuda que aún no ha sido cancelada.

Intereses Vencidos.- Resulta del capital por la tasa y por el tiempo

Renta periódica.- resulta de aplicar la formula en éste caso de la renta en función del valor del valor presente de una anualidad vencida.

$$RP = \frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Como calcular un saldo insoluto

Saber calcular el saldo insoluto nos ayuda a conocer cuál es el valor que se adeuda en un determinado período sin necesidad de hacer el cálculo de todos los períodos en la tabla.

Utilizando la siguiente formula podemos obtenerlo fácilmente:

$$VP_m = R \left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i} \right]$$

El valor de k se lo obtiene de restar el total de periodos o cuotas menos el número de cuotas que

ya se han cancelado, así:

$$K = n - m$$

$V P_m$ = Valor capital insoluto

R = Valor de la cuota periódica

K = número de cuotas por pagar

n = número de todas las cuotas o total períodos

m= número de cuotas pagadas

Ejemplo:

Textosa, adquiere un préstamo de $6.000.000,00 con una tasa de 16 % de interés anual capitalizable bimensualmente el mismo que será amortizado con pagos de igual valor en períodos bimensuales durante 5 años. Se pide: Calcular el valor de la renta periódica, y construir la respectiva tabla de amortización.

Datos a desarrollar:

VP = $6.000.000,00

RP =?

i = 16% /0,16 /6 = 0,027 bimensual

n = 5 años (5 x 6 = 30 bimestres)

Desarrollo:

$$RP = \frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$RP = \frac{6.000.000,00}{\frac{1-(1+0,027)^{-30}}{0,027}}$$

$$RP = \frac{6.000.000,00}{\frac{1-(1,027)^{-30}}{0,027}}$$

$$RP = \frac{6.000.000,00}{\frac{0.550337477}{0,027}}$$

$$RP = \frac{6.000.000,00}{20,38286955}$$

RP= 294.364,83

R = El valor de la cuota periódica es de $294.364,83

Tabla de Amortización

No. Periodos	Capital insoluto $	Interés Vencido $	Renta periódica $	Capital Devengado $	Saldo final del periodo $
1	6.000.000,00	162.000,00	294.364,83	132.364,83	5.867.635,17
2	5.867.635,17	158.426,15	294.364,83	135.938,68	5.731.696,49
3	5.731.696,49	154.755,81	294.364,83	139.609,02	5.592.087,46
4	5.592.087,46	150.986,36	294.364,83	143.378,47	5.448.709,00
5	5.448.709,00	147.115,14	294.364,83	147.249,69	5.301.459,31
6	5.301.459,31	143.139,40	294.364,83	151.225,43	5.150.233,88
7	5.150.233,88	139.056,31	294.364,83	155.308,52	4.994.925,37
8	4.994.925,37	134.862,98	294.364,83	159.501,85	4.835.423,52
9	4.835.423,52	130.556,44	294.364,83	163.808,39	4.671.615,13
10	4.671.615,13	126.133,61	294.364,83	168.231,22	4.503.383,90

11	4.503.383,90	121.591,37	294.364,83	172.773,46	4.330.610,44
12	4.330.610,44	116.926,48	294.364,83	177.438,35	4.153.172,09
13	4.153.172,09	112.135,65	294.364,83	182.229,18	3.970.942,91
14	3.970.942,91	107.215,46	294.364,83	187.149,37	3.783.793,54
15	3.783.793,54	102.162,43	294.364,83	192.202,40	3.591.591,13
16	3.591.591,13	96.972,96	294.364,83	197.391,87	3.394.199,26
17	3.394.199,26	91.643,38	294.364,83	202.721,45	3.191.477,81
18	3.191.477,81	86.169,90	294.364,83	208.194,93	2.983.282,88
19	2.983.282,88	80.548,64	294.364,83	213.816,19	2.769.466,69
20	2.769.466,69	74.775,60	294.364,83	219.589,23	2.549.877,46
21	2.549.877,46	68.846,69	294.364,83	225.518,14	2.324.359,32
22	2.324.359,32	62.757,70	294.364,83	231.607,13	2.092.752,19
23	2.092.752,19	56.504,31	294.364,83	237.860,52	1.854.891,67
24	1.854.891,67	50.082,08	294.364,83	244.282,75	1.610.608,92
25	1.610.608,92	43.486,44	294.364,83	250.878,39	1.359.730,53
26	1.359.730,53	36.712,72	294.364,83	257.652,11	1.102.078,42
27	1.102.078,42	29.756,12	294.364,83	264.608,71	837.469,71
28	837.469,71	22.611,68	294.364,83	271.753,15	565.716,56
29	565.716,56	15.274,35	294.364,83	279.090,48	286.626,08
30	286.626,08	7.738,90	294.364,99	286.626,09	0,00

Para ejemplificar en el mismo caso el valor absoluto, se pide saber cuál es el capital insoluto después del pago 25.

Con la fórmula de capital insoluto obtendremos:

$$VP_m = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right]$$

Para lo cual también requerimos de:

k = n – m

k = 30 – 25 = 5

$$VP_m = 294.364,83\left[\frac{1-(1+0,027)^{-5}}{0,027}\right]$$

$V P_m$ = 294.364,83(4,619201261)

$V P_m$ = 1.359.730,39

R = El saldo insoluto después del pago 25 es de $1.359.730,39 (Se puede verificar en la tabla de amortización en la columna de capital insoluto en el pago 26).

Amortización con reajuste de la tasa de interés

Estos reajusten se dan debido a que en el sistema financiero puede darse reajustes de tasa de interés después de ciertos períodos, lo que motivaría hacer nuevos cálculos para liquidar la deuda o negociación.

De darse el caso es muy sencillo realizar el cálculo del reajuste, para lo cual se debe calcular el capital insoluto inmediatamente después del último pago con la tasa de interés inicialmente pactada, luego con ese capital insoluto efectuar el nuevo cálculo con la nueva tasa a aplicarse, de manera que se obtenga la nueva cuota reajustada y proseguir con el devengado de pago en la tabla de amortización.

Ejemplo:

Tomando el mismo cao de Textosa, supongamos un reajuste de tasa de interés luego del pago 25, con una nueva tasa del 20 % bimestral.

$k = n - m$

$k = 30 - 25 = 5$

$$VP_m = 294.364,83 \left[\frac{1-(1+0,027)^{-5}}{0,027} \right]$$

$$V\,P_m = 294.364,83(4,619201261)$$

$$V\,P_m = 1.359.730,39$$

Haciendo el cálculo del reajuste tendremos:

$$RP = \frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$RP = \frac{1.359.730,39}{\frac{1-(1+0,003)^{-5}}{0,003}}$$

$$RP = \frac{1.359.730,39}{4,95531312}$$

$$RP = 274.398,48$$

Demostrando con la tabla tenemos:

Tabla de Amortización

No. Periodos	Capital insoluto $	Interés Vencido $	Renta periódica $	Capital Devengado $	Saldo final del periodo $
26	1.359.730,53	4.079,19	274.398,48	270.319,29	1.089.411,24
27	1.089.411,24	3.268,23	274.398,48	271.130,25	818.281,00
28	818.281,00	2.454,84	274.398,48	271.943,64	546.337,36
29	546.337,36	1.639,01	274.398,48	272.759,47	273.577,89
30	273.577,89	820,73	274.398,62	273.577,89	0,00

Fondos de Amortización o de valor futuro

Se entiende como fondos de amortización, aquel deposito o ahorro que se coloca en un determinado lapso de tiempo a intereses, con la finalidad de al final obtener una suma acordada.

Al igual que en el caso del pago de deuda o crédito, podemos elaborar la tabla de amortización a diferencia de que en ésta veremos reflejado el capital que ahorramos más los intereses que se van sumando de manera que al término del plazo estipulado tendremos el valor futuro acordado.

Para ello aplicamos la fórmula de renta en función del monto de una anualidad vencida

Ejemplo:

Pericles planifica sus súper vacaciones para dentro de 3 años, para lo cual necesita disponer en esa fecha de $8.000, 000,00. Decidiendo entonces ahorrar esta cantidad de forma gradual y decide buscar una financiera que le ofrece pagar una tasa de interés del 5 % capitalizable semestralmente. Se pide ayudar a Pericles a obtener cuanto debe proceder a depositar semestralmente para obtener su propósito?

Datos a desarrollar:

VF = $8.000.000,00

RF =?

i = 5% /0,05 /2 = 0,025 semestral

n =3 años (3 x 2 = 6 semestres

Desarrollo:

$$RP= \frac{8.000.000,00}{\frac{(1+0,025)^6 -1}{0,025}}$$

$$RP= \frac{8.000.000,00}{\frac{(1,025)^6 -1}{0,025}}$$

$$RP= \frac{8.000.000,00}{6,387736729}$$

RP=1.252.399,77

R = Pericles debe hacer depósitos semestrales de $ 1.252.399,77 para lograr su objetivo.

Demostrando mediante tabla de amortización a Pericles tenemos:

PERIODOS	VALOR DE INTERES $	CUOTA DE DEPOSITO $	FONDO INCREMENTADO $	MONTO $
1	0,00	1.252.399,77	1.252.399,77	1.252.399,77
2	31.309,99	1.252.399,77	1.283.709,76	2.536.109,53
3	63.402,74	1.252.399,77	1.315.802,51	3.851.912,04
4	96.297,80	1.252.399,77	1.348.697,57	5.200.609,61
5	130.015,24	1.252.399,77	1.382.415,01	6.583.024,62
6	164.575,62	1.252.399,76	1.416.975,38	8.000.000,00

Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE)

Flores (2011), al referirse al Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE) manifiesta que es la conversión en cuotas iguales para cada año, esto del total de ingresos y egresos que se dispone. Facilitando la toma de decisiones.

Una de las formas para calcular el (CAUE) es:

Utilizando la fórmula de Renta en valor presente de una anualidad vencida, se convierte al costo inicial de la inversión en un costo anual uniforme equivalente.

$$RP = \frac{VP}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Señala en esta parte que utilizando la fórmula de renta del valor futuro de una anualidad vencida, al valor del salvamento se lo convierte en costo anual uniforme equivalente.

$$RF = \frac{VF}{\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

De tal manera dice: restando al costo inicial de la inversión el valor del salvamento y agregándole los demás gastos anuales se logra encontrar el fondo de amortización de salvamento.

Ejemplo:

Calcular el CAUE de una retroexcavadora, cuyo valor inicial es de $12.000, 000, 00, y su valor de salvamento 1.200.000,00, se estima una vida útil de 5 años, una tasa de interés del 9% Efectiva anual. Costos de operación de 2.000.000,00.

Datos a desarrollar:

VP = $12.000.000,00

CII = ?

i = 9% /0,09

n =5 años

Vs = #1.200.000,00

CO =$2.000.000,00

Desarrollo:

$$RP=\frac{12.000.000,00}{\frac{1-(1+0,09)^{-5}}{0,09}}$$

$$RP=\frac{12.000.000,00}{\frac{1-(1,09)^{-5}}{0,09}}$$

$$RP=\frac{12.000.000,00}{3,889651263}$$

RP=3.085.109,48

$$RF=\frac{1.200.000,00}{\frac{(1+0,09)^{5}-1}{0,09}}$$

$$RF=\frac{1.200.000,00}{\frac{(1,09)^{5}-1}{0,09}}$$

$$RF=\frac{1.200.000,00}{5,98471061}$$

RF=200.510,95

CAUE: =3.085.109,48-200.510,95+2.000.000,00
R = El fondo de amortización de salvamente es $ 4.884.598,53

Valor Presente Neto (VPN)

Según el Flores Uribe, el valor presente neto es aquel que resulta de restar los ingresos netos y egresos netos, y además es aquel que nos mantiene informados de la situación financiera exacta en un proyecto.

Tasa Interna de Retorno (TIR)

La Tasa Interna de Retorno se la obtiene de aplicar una formula, su utilidad en el ámbito financiero es el de permitirnos conocer la rentabilidad de una inversión o negocio. Nos permite tomar decisiones respecto a una inversión.

Actividades de cierre del capítulo

1.- Marcial adquiere un crédito por $5.000.000,00, a una tasa de interés del 12% anual capitalizable semestralmente, la misma que se cancelara en 9 cuotas semestrales, se necesita conocer el valor de la cuota y realizar la respectiva tabla de amortización.

2.- Considerante una deuda de $ 2.000, 000,00, amortizable en 6 meses a un interés del 10% capitalizable trimestralmente calcular el saldo insoluto después de la 4 cuota.

3.- Con los mismos datos del ejercicio anterior calcular el saldo insoluto después del segundo pago

4.- Con los datos del ejercicio 2 calcule el capital insoluto después del 5 pago y realice el cálculo de interés de ese período

5.- El Sr. Montesinos desea realizar un viaje de vacaciones familiar hacia Europa, para lo cual planifica ahorrar durante 3 años, con la finalidad de obtener un monto de $3.000.000,00. Comenta ante un financista quien le ofrece por su ahorro un interés del 12% anual capitalizable semestralmente. Decidido el señor Montesinos decide averiguar de cuanto deberá ser su depósito periódico y realizar tabla de amortización.

La tabla debe llegar en su último periodo a $3.000.000,00 en importe del fondo

6.- Con el fin de asegurar el estudio de cuarto nivel de su hijo un padre decide ahorrar por 5 años cierta cantidad con el fin de obtener $ 25.000,00 hasta que esto le sea necesario en una institución financiera que paga el 12% de interés anual capitalizable trimestralmente, calcule el valor del depósito y realice su tabla de amortización.

Bibliografía

MEZA O. J. (2011) Matemáticas Financieras Aplicadas. Editorial Ecoe Ediciones cuarta edición.

FLORES U. J (2011). Matemáticas Financieras Empresariales. Editorial Ecoe ediciones segunda edición.

VIDAURRI A, H. (2014) Matemáticas Financieras. Ediciones Impresos Vacha S.A.. Quinta edición.

VILLALOBOS, J.(2012) Matemáticas Financieras. Ediciones Pearson Educción, cuarta edición.

Biografía

Brígida Jara López

Estudios realizados a Nivel Técnico y Tecnológico: Título obtenido: Técnica Superior en Comercialización en el Instituto Superior de Profesiones Medias. (Guayaquil).
Estudios Tercer Nivel: Título obtenido: Ingeniera Comercial, mención Recursos Humanos en Universidad Estatal de Milagro.
Estudios Tercer Nivel: Contador Público Autorizado otorgado por la Universidad Estatal de Milagro.
Estudios de Cuarto Nivel: Diploma Superior en Tributación, otorgado por la Universidad Estatal de Guayaquil
Estudios de Cuarto Nivel: Magister en Tributación y Finanzas, otorgado por la Universidad Estatal de Guayaquil.
Experiencia laboral: empresa pública y privada y libre ejercicio profesional
Docente Universidad Técnica de Machala, Unidad de Ciencias Empresariales, asignaturas: Matemáticas, Estadística II, Matemática Financiera II.
Docente de Investigación científica de UTMACH.

Mónica Vargas Jiménez

Ingeniera en Gestión Empresarial - Contadora Pública Auditora (Universidad Tecnológica San Antonio de Machala, Magister en Auditoría Integral, Universidad Técnica Particular de Loja.

Experiencia acreditada: Empresas públicas y privadas.
Docente Universidad Técnica de Machala: Emprendimiento II, Administración Financiera, Presupuesto, Costos (Unidad Académica de Ciencias Empresariales, carrera de Comercio Internacional).
Docente de Investigación científica de UTMACH

Alexandra Solórzano González

Contador Público, Licenciado en Ciencias de Administración y Contabilidad,
Ingeniero Comercial en Universidad Técnica de Machala.
Diploma Superior en Docencia Universitaria, Magister en Administración de Empresas, Universidad Técnica de Machala.
Especialización en Seguros, Instituto de Prácticas Bancarias y Financieras.
Experiencia laboral: empresa pública y privada y libre ejercicio profesional
Docente Universidad Técnica de Machala, asignaturas: EMPRENDIMIENTO Y GERENCIA ESTRATEGICA.
Docente de Investigación científica de UTMACH.

Matematica Financiera para
no Financieros
Se terminó de imprimir en marzo de 2016 en la
imprenta de la UTMACH, calle Loja y 25 de Junio
(campus Machala)
Esta edición consta de 300 ejemplares.

www.utmachala.edu.ec

El programa de Reingeniería del Conocimiento en la Universidad Técnica de Machala (UTMACH) es un modelo emergente de gestión de la investigación que promueve saberes científicos con pertinencia social. Desde el Vicerrectorado Académico impulsamos la investigación colectivista, donde docentes y estudiantes se engranan en la construcción y divulgación del resultado de sus ejercicios pedagógicos, heurísticos y de vinculación social, en aras de contribuir con el fortalecimiento de nuestras ventajas comparativas y competitivas a nivel transfronterizo.

Mediante este programa estratégico la UTMACH impacta sus imaginarios respecto a la relación de la docencia con la investigación, muestra de ello es la presente obra donde se cristaliza el empoderamiento y profesionalismo de sus actores y redes al servicio de la formación crítica de profesionales de avanzada.

En la UTMACH seguimos conquistando el conocimiento a través de la investigación, por ello en cada acción emprendida ***proyectamos nuestra historia***.

Ing. Amarilis Borja Herrera, Mg. Sc.
VICERRECTORA ACADÉMICA.

REINGENIERÍA DE LA INVESTIGACIÓN

UTMACH

ISBN: 978-9978-316-14-6