MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL ANÁLISIS MATEMÁTICO CON MATLAB

JUAN F. MAÑAS-MAÑAS / MARITZA A. PINTA

Editorial UTMACH

REDES 2017

COLECCIÓN EDITORIAL

Primera edición en español, 2018

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa editorial de la UTMACH

Ediciones UTMACH

Gestión de proyectos editoriales universitarios

306 pag; 22X19cm - (Colección REDES 2017)

Título: Métodos Numéricos para el Análisis Matemático con Matlab.

Juan F. Mañas Mañas / Maritza A. Pinta (Coordinadores)

ISBN: 978-9942-24-104 -7

Publicación digital

Título del libro: Métodos Numéricos para el Análisis Matemático con Matlab.

ISBN: 978-9942-24-104 -7

Comentarios y sugerencias: editorial@utmachala.edu.ec

Diseño de portada: MZ Diseño Editorial

Diagramación: MZ Diseño Editorial

Diseño y comunicación digital: Jorge Maza Córdova, Ms.

Km. 5 1/2 Vía Machala Pasaje

www.utmachala.edu.ec

Machala - Ecuador

Métodos Numéricos para el Análisis Matemático con MATLAB

Juan F. Mañas-Mañas
Maritza A. Pinta

Coordinadores

Resumen

El objetivo principal de esta obra es introducir al lector en el estudio de los **Métodos Numéricos** utilizando la plataforma computacional MATLAB, e impulsar en el estudiante el desarrollo de habilidades para el Análisis Matemático. Este libro es un trabajo conjunto de docentes de la Universidad Técnica de Machala (Ecuador) y de la Universidad de Almería (España) empeñados en difundir los Métodos Numéricos.

Los Métodos Numéricos son de gran importancia porque constituyen hoy en día en una herramienta fundamental para la solución de muchos problemas de las ciencias cuya solución exacta no es alcanzable y, es por tanto, necesario obtener una solución aproximada. Por otro lado, el desarrollo computacional actual, a través de software como MATLAB, permite resolver rápidamente mediante la implementación de algoritmos numéricos eficientes problemas que antes tenían una solución numérica poco factible, debido al tiempo que se requería para ello.

Este libro se compone de 6 capítulos. En el primero de ellos, se realizará un repaso de las bases matemáticas necesarias para la comprensión de los temas a tratar en los capítulos subsiguientes; se abordarán conceptos referentes a: funciones, derivación, integración, ecuaciones diferenciales, matrices y vectores.

MATLAB se fundamenta en cuatro paradigmas básicos de la programación: la programación secuencial, la programación estructurada, la programación modular y la programación orientada a objetos. Por ello se ha considerado necesario en el segundo capítulo hacer una presentación de la sintaxis de comandos secuenciales que sean de relevancia significativa para la construcción de algoritmos de métodos numéricos y la visualización de resultados. Para ello, se empieza con la caracterización de las variables en el entorno de MATLAB; luego, se presentan los comandos que implementan diferentes funciones matemáticas. De esta forma, se aprovecha los recursos disponibles en este paquete computacional para fortalecer las soluciones numéricas de nuestros algoritmos.

El capítulo 3 nos introduce en el estudio de la derivación numérica de funciones, la cual tiene muchas aplicaciones, especialmente en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Además, nos permite determinar la derivada de un orden determinado de una función en un punto dado, utilizando solamente los valores que toma la función en una serie de puntos. Se realizará un estudio con detalle pero con enfoque práctico de estas fórmulas y del error teórico cometido, prestando atención a un método relevante de aceleración de la convergencia conocido como método de extrapolación de Richardson; haciendo la implementación de estos métodos en MATLAB a través de ejemplos prácticos.

Posteriormente los capítulos 4 y 5 están dedicados a la integración numérica

que tienen como objetivo aproximar numéricamente integrales definidas, las cuales tienen muchas aplicaciones tanto en matemáticas como en procesos científicos-técnicos. Este cálculo suele ser complicado y en la mayoría de los casos es inviable si se pretende expresar el valor de la integral definida como la evaluación de combinación de funciones elementales.

El capítulo 4 tiene por objetivo obtener expresiones, usualmente denominadas fórmulas de cuadratura, que permitan aproximar de la forma más exacta posible una integral definida. Obtendremos fórmulas basadas en polinomios interpoladores, denominadas fórmulas de Newton-Cotes. Como es habitual en el análisis numérico proporcionaremos expresiones para el error cometido al usar estas fórmulas. Adicionalmente aplicaremos el proceso de aceleración o método de Romberg y algunas breves notas sobre cuadraturas adaptativas.

En el capítulo 5, dedicado a la integración numérica, se presentarán las fórmulas de cuadratura gaussianas. La ventaja de estas fórmulas es que los nodos involucrados no son fijos, sino que van a ser los ceros de determinados polinomios ortogonales; de esta forma natural, imbricamos la integración numérica con la Teoría de Aproximación a través del uso de los polinomios ortogonales. Haremos un estudio detallado y práctico de las fórmulas gaussianas, analizando su exactitud máxima, el error y el cálculo eficiente de sus nodos y pesos mediante los valores y vectores propios de la matriz de Jacobi.

Nuestro último capítulo está dedicado a las ecuaciones diferenciales, que es la herramienta matemática más útil a la hora de describir problemas en todos los ámbitos de las ciencias y también en otras ramas del conocimiento. Es bien conocido su uso en la modelización matemática en biología, ingeniería, medicina, informática y cualquier área científico-técnica, pero también en otras áreas como en el estudio de comportamientos sociales o en economía.

En este libro introductorio a los métodos numéricos pretendemos acercar al lector a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Las ecuaciones, o de forma más natural, los sistemas de EDO que aparecen en la modelación matemática, raramente son resolubles utilizando solamente el análisis matemático y es imprescindible el uso del análisis numérico. Se asumirá que el lector posee un cierto conocimiento de EDO, y se presentarán de forma práctica métodos útiles de resolución numérica de problemas de valores iniciales y problemas de contorno. Se prestará atención a los denominados problemas stiff. La aplicación de los métodos presentados en este capítulo hará uso necesariamente del ordenador y del programa MATLAB.

Listado de autores por capítulos

- Capítulo 1:
  - Maritza A. Pinta.
  - Fausto F. Redrován.
- Capítulo 2:
  - Eduardo Tusa.
  - Carlos Loor.
- Capítulo 3:
  - Juan F. Mañas-Mañas.
  - Maritza A. Pinta.
- Capítulo 4:
  - Juan F. Mañas-Mañas.
  - Maritza A. Pinta.
- Capítulo 5:
  - Juan F. Mañas-Mañas.
  - Maritza A. Pinta.
- Capítulo 6:
  - Juan J. Moreno-Balcázar.

Dedicatorias

Dedico esta obra a mi amado esposo Eguipto y a mi hijo Juan José, por su amor y apoyo incondicional.
Maritza A. Pinta

Esta obra es dedicada amis estudiantes, quiénes han tenido la libertad de compartirme sus inquietudes, inconformidades y preocupaciones; en torno al área de la programación y métodos numéricos en MATLAB. Dedico este trabajo a toda mi familia, mis padres, mis hermanas, mis sobrinos; quiénes no han dudado en demostrarme su enorme afecto, cariño y paciencia en cada acierto y desacierto que se concibe a lo largo de mi vida. A aquellos grandes amigos y amigas que a pesar del tiempo, no han renunciado a caminar junto a mi lado. Finalmente, a todos los grandes soñadores del mundo que se levantan cada mañana dispuestos a cambiar el curso de su destino.
Eduardo Tusa

A toda mi familia. En especial, a mi mujer y compañera, Loli, y a mis hijas, Rocío y Mar, por ser tan maravillosas y a mis padres, Juan José y Rosa, gracias a ellos empezó todo, siempre serán mis referentes.
Juan J. Moreno-Balcázar

Dedico esta obra a mis padres, Francisco y Rosalía, ya que gracias a ellos he llegado hasta donde estoy hoy en día. A mi hermana Rosa María y mi novia Mónica por el apoyo recibido, y a toda mi familia y amigos por los ánimos dados.
Juan F. Mañas-Mañas

A mi esposa Rosita, mi consejera e inspiración.
A mis hijos Abigaíl y Mateo, mi motivación y razón.
A mis padres Fausto y Mirian, mi guía y apoyo.
A la memoria de mi abuelito Fausto,
mi primer profesor de matemáticas.

Fausto F. Redrován

Agradecimientos

Los autores compiladores, Maritza A. Pinta y Juan F. Mañas-Mañas agradecen en primer lugar a todos los autores su trabajo, perseverancia y todo el esfuerzo dedicado a la hora de realizar este libro, ya que gracias a ellos el mismo ha sido posible.

Todos los autores aprovechamos estas líneas para agradecer a las principales autoridades de la Universidad Técnica de Machala, quienes han brindado el tiempo, los recursos y el escenario para impulsar la producción científica de sus principales actores. Asimismo, expresamos nuestra gratitud a la Editorial UTMACH y al Centro de Investigaciones por fortalecer iniciativas orientadas a preservar el legado científico de los investigadores.

Los autores de la Universidad Técnica de Machala expresamos también gratitud al decano, subdecano, coordinadores y colegas docentes de la Unidad Académica de Ingeniería de Civil, por su cooperación en potenciar los espacios de investigación alcanzados y a los miembros del Grupo de Investigación de Automatización, Matemática y Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, AutoMath-TIC.

Por parte de la Universidad de Almería, el autor Juan J. Moreno Balcázar está parcialmente financiado por los siguientes proyectos e instituciones: Grupo de Investigación FQM-229 de la Junta de Andalucía adscrito al Campus de Excelencia Internacional del Mar (CEIMAR); Ministerio de Economía y Competitividad de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) con el proyecto MTM2014-53963-P; Centro para el Desarrollo y la Transferencia de la Innovación Matemática en la Empresa (CDTIME). El autor Juan F. Mañas-Mañas está financiado por una beca predoctoral del Plan Propio de la Universidad de Almería, además, parcialmente financiado por los siguientes proyectos e instituciones: Grupo de Investigación FQM-229 de la Junta de Andalucía adscrito al Campus de Excelencia Internacional del Mar (CEIMAR); Ministerio de Economía y Competitividad de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) con el proyecto MTM2014-53963-P.

Finalmente, y no por ello menos importante, agradecemos también a los árbitros anónimos la revisión de los capítulos, gracias a sus comentarios y aportaciones esta obra ha ganado valor y relevancia.

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

Autores: Maritza A. Pinta[1], Fausto F. Redrován[2]

[1,2]Unidad Académica de Ingeniería Civil, Universidad Técnica de Machala, Ecuador.

[1]mpinta@utmachala.edu.ec, [2]fredrovan@utmachala.edu.ec

El presente capítulo, tiene como propósito hacer un repaso de conceptos preparatorios, necesarios para el estudio de Derivación e Integración numérica, y de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, durante este capítulo se abordarán conceptos básicos de funciones continuas, derivación, integración, ecuaciones diferenciales y matrices.

En cada temática se hará en primer lugar una exposición teórica, incluyendo en unos casos, gráficas, tablas y demostraciones. Luego se presentarán ejemplos y ejercicios propuestos, los mismos que, por cuestión de espacio, se los ha hecho constar en el apéndice correspondiente a este capítulo.

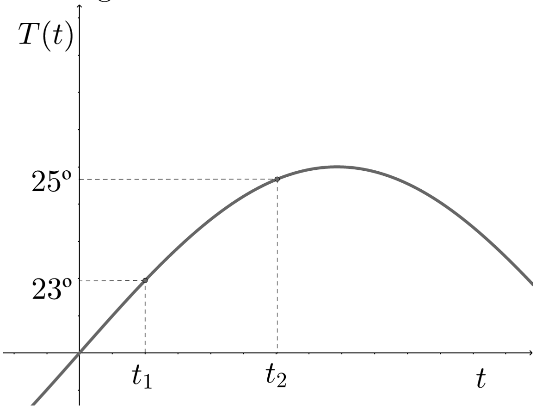
1.1. Teoremas importantes para funciones continuas.

Una función continua se utiliza para representar valores que en el mundo real cambian de manera continua, es decir, sin que haya saltos entre un valor a otro, como por ejemplo la temperatura con respecto al tiempo, en la que llegar de 23° en un tiempo t_1 a 25° en un tiempo t_2, los valores de esta variable $T(t)$ tuvieron que haber pasado por toda la extensión de números reales en el intervalo $t_1 < t < t_2$, tal como se muestra en la Figura 1.1, no se puede concebir que la temperatura simplemente haya saltado de un valor a otro porque ese no es su comportamiento natural (ver Figura 1.2).

Entonces, por definición [12], una función $T(t)$ es continua en un punto t_c si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $T(t)$ está definida en c.
2. $\lim\limits_{t \to t_c} T(t)$ existe.
3. $\lim\limits_{t \to t_c} T(t) = T(t_c)$.

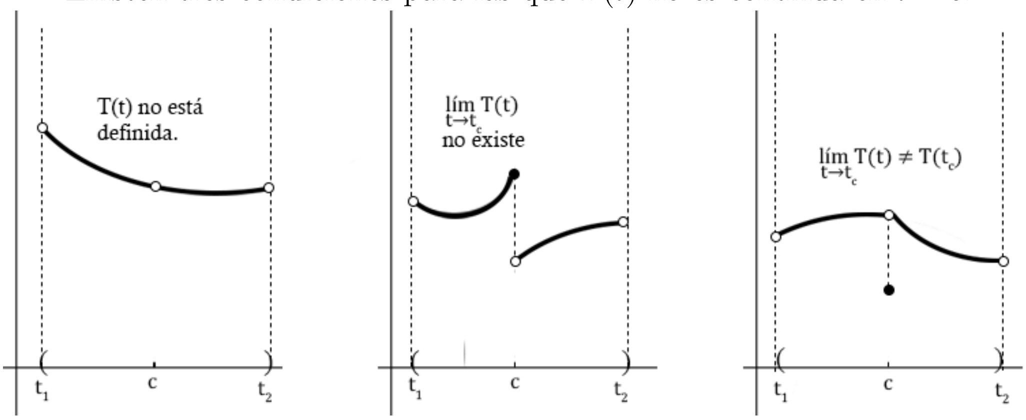
Figura 1.1: Función Continua.



T(t) es continua en $t_1 < t < t_2$
Fuente: Elaboración propia.

Figura 1.2: Función Discontinua.

Existen tres condiciones para las que $T(t)$ no es continua en $t = c$.



Fuente: Tomado de [12]

En consecuencia y en general, según [12], una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto entre a y b, es decir, si cada punto en el intervalo cumple las tres condiciones establecidas.

Uno de los primeros teoremas que se debe enunciar, conocida la definición de función continua, es el de Bolzano; desde esta afirmación se fundamentan otros resultados importantes de funciones continuas, [6].

1.1.1. Conservación del signo de las funciones continuas

Antes de demostrar el teorema de Bolzano, se necesita demostrar el teorema de conservación del signo en funciones continuas que indica:

Teorema 1.1. *[1] Si f es una función continua en c y suponemos que $f(c) \neq 0$, entonces existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que*

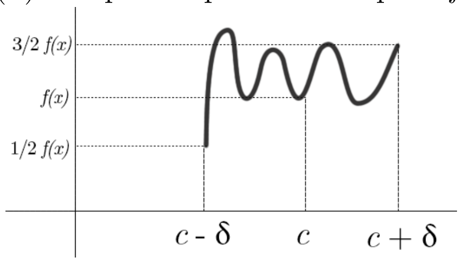
$f(c)$.

Demostración: Supóngase primero que $f(c) > 0$, como f es continua, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que: $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$, siempre que $c - \delta < x < c + \delta$.

Tomando el δ correspondiente a $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$ entonces la desigualdad anterior se transforma en:

$$f(c) - \frac{f(c)}{2} < f(x) < f(c) + \frac{f(c)}{2}, \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta.$$
$$\frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}, \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta \text{ . Ver Figura 1.3:}$$

Figura 1.3: Teorema de Conservación de Signo.
Aquí $f(x) > 0$ para x próximo a c pues $f(c) > 0$.



Fuente: Tomado de [1]

De lo anterior se deduce que $f(x) > 0$ en este intervalo, y por tanto, $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo, que es lo que se quería demostrar. Para la segunda parte, si $f(c) < 0$ se toma δ correspondiente $\delta = -\dfrac{f(c)}{2}$ y se llega a la misma conclusión. Esto implica además, según [1], que si existe continuidad a un lado de c, entonces existe el correspondiente intervalo unilateral $[c, c+\delta)$ o $(c-\delta, c]$ en el cual f tiene el mismo signo que $f(c)$, sin importar la forma de la curva de la función, tal y como se aprecia en la Figura 1.3.

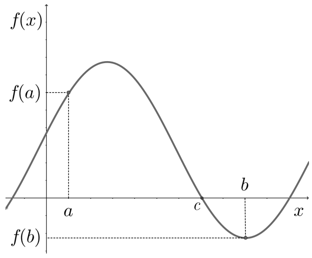
1.1.2. Teorema de Bolzano

Lo que demuestra este teorema es que si se tiene una función continua en un intervalo dado $[a, b]$, de tal forma que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, es decir, $f(a)\ f(b) < 0$, entonces la función debe cortar el eje x en al menos un punto entre a y b (es lo que se denomina un teorema de existencia, pues no proporciona un método para determinar dicho punto) para más detalle ver [1], [12].

Teorema 1.2. *Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y dado que $f(a)f(b) < 0, \exists\ c \in (a, b), f(c) = 0$*

Demostración: Para la demostración se siguen las ideas de [1], por lo que se tiene una función $f(x)$ que cumple tres condiciones como en la Figura 1.4:

Figura 1.4: Teorema de Bolzano.



Fuente: Tomado de [1].

1. $f(x)$ es continua en $[a, b]$.
2. $f(a) > 0$.
3. $f(b) < 0$.

Nota 1.1. *Se obvia la demostración cuando $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ por ser de igual resolución.*

Se define un conjunto $C = \{x \in [a, b]/f(x) \geq 0\}$, que representa a todos los puntos del intervalo que hacen que la función sea positiva, $f(x) \geq 0$.

Al ser $C \neq \emptyset$ y $C \subset [a, b]$, se dice que C es acotado, y por lo tanto tiene un elemento $c \in [a, b]$ que es la mínima cota superior o supremo de dicho conjunto, $c = Sup(C)$.

Como $c \in [a, b]$, y dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es continua en c, y por el Teorema 1.1 se asegura que $\exists(c - \delta, c + \delta)$ donde $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo.

Ahora, si suponemos que $f(c) < 0$, entonces por el Teorema 1.1 , $f(x) < 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$, lo que implicaría que el conjunto C, cuyos puntos hacen que $f(x) > 0$, no podría incluir al intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ pues aquí la función es negativa, y por tanto como mucho tendríamos que el punto $c - \delta$ sería ahora su mínima cota superior, y dado que $c - \delta < c < c + \delta$, haría que el punto c deje de ser el supremo, lo que contradice nuestro supuesto inicial de que $c = Sup(c)$. De esto se deduce que $f(c) < 0$ es falso.

Ahora vamos a suponer por el contrario que $f(c) > 0$, entonces por el Teorema 1.1, $f(x) > 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$, lo que implicaría que el conjunto C, cuyos puntos hacen que $f(x) > 0$, incluye al intervalo $(c-\delta, c+\delta)$, y por tanto tendríamos que el punto $c+\delta$ sería ahora su nueva mínima cota superior, y dado que $c-\delta < c < c+\delta$, haría que el punto c deje de ser el supremo, lo que también contradice nuestro supuesto inicial de que $c = Sup(C)$. De esto se deduce que $f(c) > 0$ es falso también.

En consecuencia, si $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ son afirmaciones falsas, entonces $f(c) = 0$, con lo que queda demostrado el teorema de Bolzano. (Para más detalle ver [1], [14]). Otro resultado de las propiedades de una función continua es el Teorema del valor intermedio.

1.1.3. Teorema del valor intermedio (o Propiedad de Darboux)

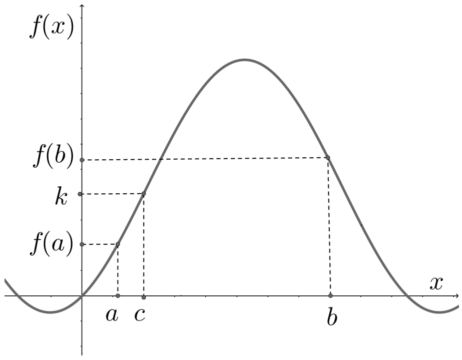
Este teorema es uno de los más importantes también respecto a la continuidad de las funciones, y asegura la existencia de al menos un número c que cumple lo siguiente (también es un teorema de existencia), (Ver [12]):

Teorema 1.3. *Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, donde $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$ (ver Figura 1.5) o $f(b) < k < f(a)$ (ver Figura 1.6), entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$.*

Este teorema establece que si x recorre todos los valores desde a hasta b, entonces $f(x)$ debe asumir todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, debido a que f es continua en el intervalo.

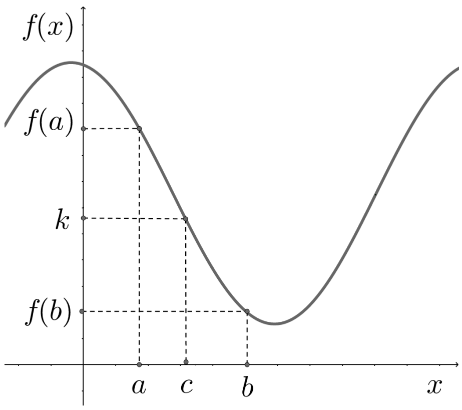
En las figuras 1.5 y 1.6 se puede apreciar los posibles casos en los que una función puede ser continua en un intervalo $[a, b]$.

Figura 1.5: Teorema del Valor Intermedio (caso 1)



f continua en $[a, b]$, $f(a) < k < f(b)$.
Fuente: Elaboración propia.

Figura 1.6: Teorema del Valor Intermedio (caso 2)



f continua en $[a, b]$, $f(b) < k < f(a)$.
Fuente: Elaboración propia.

Demostración: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y $f(a) < k < f(b)$, entonces suponemos que (Ver [1]):
$g(x) = f(x) - k$, y por tanto también $g(x)$ será continua en $[a, b]$.
Por tanto, dado que $f(a) < k$, y como $g(a) = f(a) - k$, entonces $g(a) < 0$.
Así mismo, dado que $f(b) > k$, y como $g(b) = f(b) - k$, entonces $g(b) > 0$. Entonces, como tenemos que:

1. $g(x)$ es continua en $[a, b]$.
2. $g(a) < 0$.
3. $g(b) > 0$.

Aplicando el teorema 1.2 (teorema de Bolzano), podemos concluir que:

$$\exists c \in [a, b], g(c) = 0.$$

y como sabemos que:

$$g(c) = f(c) - k.$$

Tenemos, reemplazando

$$0 = f(c) - k.$$

De donde:

$$f(c) = k$$

Cabe señalar, y como se puede apreciar, el teorema del valor intermedio es una generalización del teorema de Bolzano.

Nota 1.2. *Se puede hacer una demostración similar cuando $f(b) < k < f(a)$*

1.2. Derivación

Definicion 1.1. *Se define a la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$, como la razón de cambio instantáneo de y con respecto a x, cuando $x = a$. (Ver [17]).*

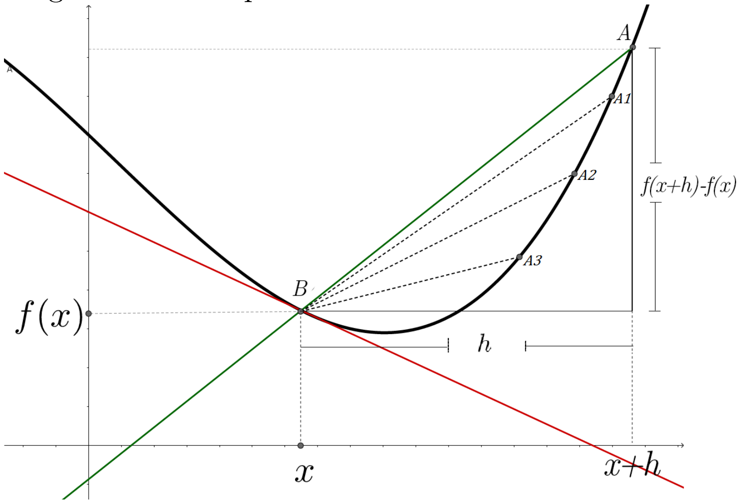
1.2.1. Interpretación Geométrica de la Derivada

Para explicar el concepto geométrico de derivada, haremos uso de la estrategia utilizada por Pierre de Fermat y Newton [8]. Sea la función real f, continua en un intervalo abierto que contiene a los puntos A y B, y, AB una secante a la misma, como consta en la Figura 1.7.

En la medida que el punto A se acerca al punto B, la distancia horizontal h disminuye, hasta que, cuando h tiende a ser cero, la secante BA se convierte en la tangente a la curva en el punto A, y su pendiente viene a ser la derivada de la función en A.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

Figura 1.7: Interpretación Geométrica de la Derivada



Fuente: Elaboración propia

Por lo que, geométricamente se define a la derivada de una función en un punto dado, como la pendiente de la tangente a la función en ese punto.

Las nomenclaturas más utilizadas y heredadas de los precursores del cálculo diferencial, son:

Tabla 1.1: Nomenclaturas de la derivada.

Notacion	**Se lee**	**Matemático**
$\frac{dy}{dx}$	La derivada de y con respecto a x	Gottfried Leibniz
$\frac{df}{dx}$	La derivada de la función f con respecto a x	
y'	y prima	Jhoseph-Louis Lagrange
$f'(x)$	f prima	
D, y	La derivada de y con respecto a x	Leonhard Paul Euler
D, f	La derivada de la función f con respecto a x	

Fuente: Tomado de [16]

1.2.2. Fórmulas de derivación

En la Tabla 1.2 se resumen las principales fórmulas de derivación, siendo: a y k constantes; $u(x)$, $v(x)$ y $w(x)$ son funciones de x, pero; para ahorrar la notación vamos a obviar la dependencia en x y solamente vamos a escribir u, v y w.

(Ver Ejemplos A.1 - A.5)

Tabla 1.2: Fórmulas de derivación.

f(x)	***f'(x)***	***f(x)***	***f'(x)***
k	0	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln_a}$
x	1	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
x^n	nx^{n-1}	u^v	$v.u^{v-1}u' + u^v. \ln u.v'$
$u \pm v \pm w$	$u' \pm v' \pm w'$	sen$u$	$\cos u.u'$
$u.v$	$u.v' + v.u'$	$\cos u$	$-$sen$u.u'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{v.u'-u.v'}{v^2}$	$\tan u$	$\sec^2 u.u'$
u^n	$n.u^{n-1}.u'$	$\cot u$	$-\csc^2 u.u'$
a^u	$a^u \ln a.u'$	$\sec u$	$\sec u. \tan u.u'$
e^u	$e^u.u'$	$\csc u$	$-\csc u. \cot u.u'$

Fuente: Elaboración propia.

1.2.3. Segunda Derivada y Derivadas Sucesivas

Definicion 1.2. *Sea y' la primera derivada de la función $y = f(x)$, la segunda derivada y'', se define como la derivada de esta primera derivada. Es decir:*

$$y'' = \frac{d(y')}{dx}$$

Si aplicamos la misma definición, y derivamos a la segunda derivada, obtendremos la tercera derivada de la función original, y así sucesivamente. En la Tabla 1.3 sintetizaremos la nomenclatura y definición de las derivadas sucesivas:

Tabla 1.3: Derivadas Sucesivas

Definición	*Notación*	*Se lee*
	$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y', f'(x), D\_xy, D_xf$	La primera derivada de y con respecto a x
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$	$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx^2}, y'', f''(x), D_x^2y, D_x^2f$	La segunda derivada de y con respecto a x
$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$	$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3f}{dx^3}, y''', f'''(x), D_x^3y, D_x^3f$	La tercera derivada de y con respecto a x
$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$	$\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^4f}{dx^4}, y^{IV}, f^{IV}(x), D_x^4y, D_x^4f$	La cuarta derivada de y con respecto a x
$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$	$\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^nf}{dx^n}, y^n, f^n(x), D_x^ny, D_x^nf$	La enésima derivada de y con respecto a x

Fuente: Tomado de [16]

(Ver Ejemplo A.6)

1.3. Valor extremo

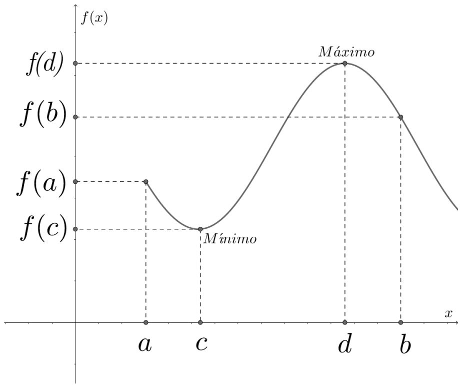
Se debe indicar que los mínimos y máximos de una función en un intervalo se denominan valores extremos de dicha función en el intervalo, y también se conocen como mínimo absoluto y máximo absoluto en el intervalo, respectivamente, [12]. Entonces, si f es continua en un intervalo I y definida en un punto c y en un punto d, tenemos:

Definicion 1.3.

1. *Si* $\forall x \in I, f(x) \geq f(c) \Rightarrow f(c)$ *es el mínimo de* f *en* I *(mínimo absoluto).*
2. *Si* $\forall x \in I, f(x) \leq f(d) \Rightarrow f(d)$ *es el máximo de* f *en* I *(máximo absoluto).*

En la Figura 1.8 se puede apreciar lo enunciado: si $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en c y un máximo absoluto en d.

Figura 1.8: Valores extremos en un intervalo $[a, b]$



Fuente: Elaboración Propia

Con esta definición, el teorema del valor extremo queda enunciado de la siguiente manera:

Teorema 1.4. ***([12, Th. 3.1])*** *Si* f *es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$*, entonces* f *tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo (ver Figura 1.8).*

Este teorema, al igual que el del valor intermedio, es un teorema de existencia pues solo indica que existen valores máximos y mínimos mas no cómo determinarlos, para más detalle ver [12].

(Ver Ejemplo A.7)

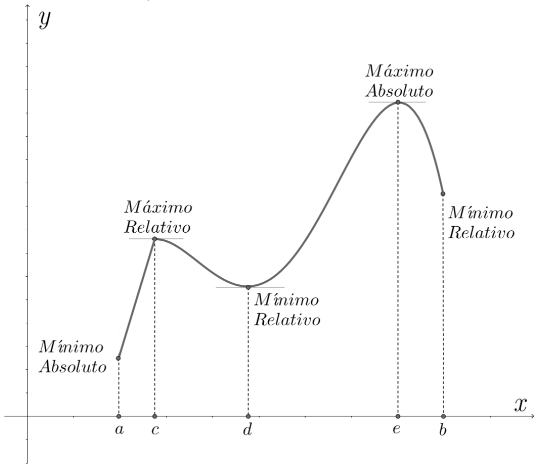
Definicion 1.4. ***Extremos Relativos o Locales (Ver [18])***

- *Una función* f *tiene un valor* ***máximo relativo*** *(máximo local) en un punto interior* c *de su dominio si* $f(x) \leq f(c), \forall x$ *en algún intervalo abierto que contenga a* c*.*

- *Una función f tiene un valor **mínimo relativo** (mínimo local) en un punto interior d de su dominio si $f(x) \geq f(d) \forall x$ en algún intervalo abierto que contenga a d.*

La Figura 1.9 describe esta definición:

Figura 1.9: Máximos y mínimos en un intervalo abierto (a, b)



Fuente: Tomado de [18]

Estos puntos c y d, donde se localizan un máximo relativo o un mínimo relativo, respectivamente, se denominan **puntos críticos**. En estos puntos, la función puede tener una tangente, en cuyo caso su derivada en ese punto sería cero, $f'(d) = 0$, o puede no ser derivable en ese punto c (ver más información en [12]). Dicho de otra forma:

- Si f no es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico.
- Si f es derivable en $x = d$ y $f'(d) = 0$, entonces, por definición, d es un punto crítico.

(Ver Ejemplo A.8)

1.4. Teorema de Rolle.

El Teorema 1.4 (Teorema del valor extremo) indica que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe tener un mínimo y un máximo absoluto en dicho intervalo, pero estos pueden ocurrir en los puntos extremos [12], como se puede apreciar en la Figura A.1 del Apéndice A.2, donde el máximo absoluto está en el punto $(3, 5)$, es decir, en el extremo del intervalo $[0, 3]$.

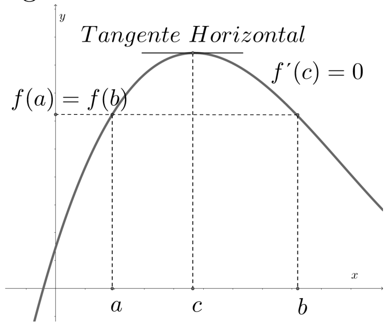
Teorema 1.5. *El teorema de Rolle establece las condiciones para que un valor extremo esté en el interior y no en los puntos terminales del intervalo cerrado (ver [10] [12]), es decir, la función f tiene una tangente horizontal en dicho punto* *interior, como se puede apreciar en la Figura 1.10:*

Sea f,

1. *Continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.*
2. *Derivable en el intervalo abierto (a, b).*
3. *Y $f(a) = f(b)$.*

Entonces $\exists c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$, por donde pasa la tangente horizontal.

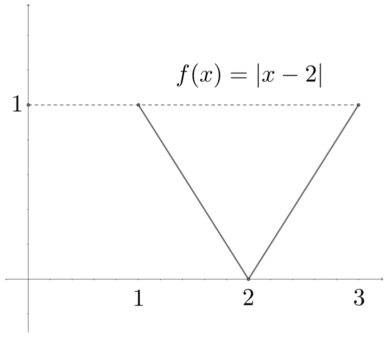
Figura 1.10: Teorema de Rolle



Valor extremo $(c, f(c))$ en el interior de (a, b)
Fuente: Elaboración propia

Cabe señalar que la continuidad de una función en un intervalo $[a, b]$ no garantiza que sea derivable como se puede apreciar en la Figura 1.11 donde la función $f(x) = |x-2|$ es continua en $[1, 3]$, y $f(1) = f(3)$, pero f no es derivable en $x = 2$ puesto que los límites de la derivada por la izquierda y derecha de este punto son diferentes $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\partial |x-2|}{\partial x} = -1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\partial |x-2|}{\partial x} = 1$.

Figura 1.11: Función no derivable en un punto.



Fuente: Elaboración Propia.

Entonces se pueden tener funciones con máximos y mínimos relativos (locales) como en la Figura 1.11, es decir, con puntos críticos ($x = 2$), pero que no produzcan tangentes horizontales, (ver [12]).

Demostración:

1. Si $f(a) = f(b) = d \wedge f(x)$ es constante, es decir, $f(x) = d \ \forall \ x \ \in [a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ (la derivada de una constante es cero) y por tanto si $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$.

2. Si $f(a) = f(b) = d \wedge \exists x \in (a, b), f(x) > d$, por el teorema del valor extremo (teorema 1.4) f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo (a, b) y dado que $f(c) > d$, este máximo no podría estar en d, es decir, f tiene un máximo en el interior del intervalo (a, b) además de que c es punto crítico de f, y por tal razón, $f'(c) = 0$ debido a que f es derivable en (a, b).

3. Si $f(a) = f(b) = d \wedge \exists x \in (a, b), f(x) < d$, por el teorema del valor extremo (Teorema 1.4) f tiene un mínimo en algún punto c en el intervalo (a, b) y dado que $f(c) < d$, este mínimo no podría estar en d, es decir, f tiene un mínimo en el interior del intervalo (a, b) además de que c es punto crítico de f, y por tal razón, $f'(c) = 0$ debido a que f es derivable en (a, b).

(Ver Ejemplo A.9)

1.5. Teorema del Valor Medio.

Teorema 1.6. *Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que (ver [12]):*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.2}$$

Geométricamente el teorema del valor medio garantiza la existencia de una recta tangente paralela a la secante que pasa por (a,f(a)) y (b,f(b))" (Para más información ver [5] [12]).

Demostración [12]:
Según la Figura 1.12 la ecuación de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

Sea

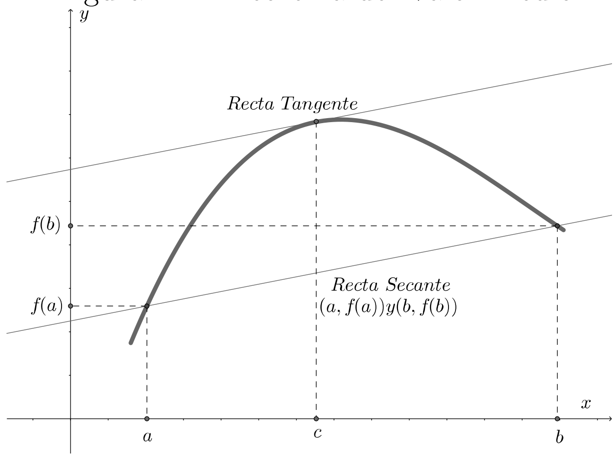
$$g(x) = f(x) - y.$$

1. $$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

   Evaluando a y b en $g(x)$, se tiene:

   $$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0.$$

Figura 1.12: Teorema del Valor Medio



Fuente: Elaboración Propia

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

Por lo que:

2. $g(a) = g(b) = 0$.

3. Y como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Entonces, por las condiciones (2) y (3) se puede aplicar el teorema de Rolle (Teorema 1.5) sobre la función $g(x)$ en (1), es decir, entonces $\exists c \in (a, b)$, tal que $g'(c) = 0$, y de ahí que derivando $g(x)$ en (1) se tiene:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Evaluando en c y según el teorema de Rolle, se tiene

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Despejando,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Que es lo que se quería demostrar.

(Ver Ejemplo A.10)

1.6. Integración.

Definicion 1.5. *La integración es un proceso contrario a la derivación, siendo la función $F(x)$ la primitiva o antiderivada de la función $f(x)$ en un intervalo I,* *si $F'(x) = f(x)$ para todo x del intervalo I. La integral indefinida se representa por (Ver [18]):*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Donde:
$c =$ Constante de integración.
$\int =$ Signo de integración.
$f(x) =$ Integrando.
$dx =$ Diferencial de la variable independiente.

(Ver en Apéndice A la Tabla A.1 de las principales fórmulas de integración inmediatas)

(Ver Ejemplos A.11- A.14)

1.6.1. Integral Definida

Teorema 1.7. ***([17, Th. 3])*** *Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene solo un número finito de discontinuidades de saltos, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, existe la integral definida si $\int_a^b f(x)dx < +\infty$.*

Definicion 1.6. *[18] Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, y n subintervalos de igual ancho, $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0(= a), x_1, x_2, ..., x_n(= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ los* ***puntos muestra*** *en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el $i-$ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la* ***integral definida de f, desde*** *a* ***hasta*** *b, es:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

El resultado de la integral definida es un número y abordaremos su resolución a continuación, al tratar el segundo problema fundamental del cálculo.

1.6.2. Teoremas Fundamentales del Cálculo

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1.8. *[19] Si f es continua en $[e, b]$ entonces, $f(x) = \int_e^x f(t)dt$ es continua en $[e, b]$ y diferenciable en (e, b) y su derivada es $f(x)$.*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_e^x f(x)dt = f(x).$$

(Ver Ejemplo A.17)

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1.9. ***([18, Th. 4])*** *Si f es continua en todos los puntos de $[a,b]$ y F es cualquier primitiva de f en $[a,b]$, entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(Ver Ejemplo A.18)

1.6.3. Integración Por Partes

La integración por partes, es una de la técnica más utilizada, cuando no es posible integrar directamente con las formulas inmediatas.

Definicion 1.7. *Sea las funciones $u(x)$, $v(x)$, la integral $\int u.dv$ es igual, al producto de las dos funciones menos la integral de v por du. Es decir:*

$$\int u.dv = u.v - \int v.du. \tag{1.3}$$

Se debe elegir adecuadamente u y dv, considerando que dv debe ser siempre posible de integrar y que, la integral $\int v.du$, sea menos compleja que la integral original. De no ser así, posiblemente escogimos erróneamente u y dv, ó, no es posible integrar con esta técnica.

(Ver Ejemplo A.15, A.16)

1.7. Ecuaciones Diferenciales.

Una ecuación, se llama diferencial, cuando contiene derivadas o diferenciales, y, tiene dos elementos importantes: el orden y el grado.
Orden de una ecuación diferencial: Está dado por la derivada de mayor orden presente en la ecuación.
Grado de una ecuación diferencial: Está dado por el mayor exponente al que está elevado la derivada de mayor orden.

(Ver Ejemplo A.19)

1.7.1. Tipos de Ecuaciones Diferenciales

En la Tabla 1.4 tenemos las clases más importantes de ecuaciones diferenciales:

Tabla 1.4: Clasificación de las ecuaciones diferenciales.

Clasificación Según	***Nombre***	***Característica***
Tipo	Ordinarias	Contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola,variable independiente.
	Parciales	Contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más,variables independientes.
Grado	Lineales	Los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas son constantes o funciones de x. La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.
	No lineales	Las que no cumplen las condiciones de las lineales.
Orden	Primer orden, Segundo orden, Tercer orden, etc	De acuerdo con la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Fuente: Tomado de [3]

A continuación nos ocuparemos específicamente de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

1.7.2. Solución de una Ecuación Diferencial

Solución general: Es el conjunto de todas las funciones que la verifican, y, que en general son familias n-paramétricas de curvas, para más detalles ver [15]. En estas soluciones aparecen tantas constantes como orden tiene la ecuación.

(Ver Ejemplo A.20)

Solución particular: Es la función que satisface a la ecuación diferencial, siendo una de las soluciones generales, en la que se ha definido el valor de las constantes. En el ejemplo anterior una solución particular seria $y = 2e^{-x}$, donde $C = 2$, lo cual se puede igualmente verificar con el proceso anterior.

1.7.3. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En la Tabla 1.5 sintetizamos los principales tipos de E.D.O. de primer orden, su forma y solución.

Tabla 1.5: Ecuaciones diferenciales de primer orden.

Tipo	*Forma*	*Solución*
Variables Separables [20]	$\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$	Hacer $p(y) = \dfrac{1}{h}(y)$, separar e integrar ambos lados de: $p(y)dy = g(x)dx$
Homogéneas [3]	$\dfrac{dy}{dx} + f(x,y) = 0$	Sea, $\dfrac{y}{x} = v$, hacer $y = vx$, ó $x = vy$, reemplazar en la ecuación y resolver como ecuación de variables separables.
Lineal no homogénea[9]	$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int (Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)\right]$

Fuente: Elaboración propia.

(Ver Ejemplo A.21)

1.7.4. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes de n−ésimo Orden.

Son ecuaciones de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Para resolverlas, de acuerdo con [3], se realizan los siguientes pasos:

1. Se escribe la ecuación algebraica característica:

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

2. Obtenemos las raíces de esta ecuación característica.

3. Si las raíces son reales e iguales, la solución es:

$$y = e^{rx}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1}).$$

4. Si las raíces son reales, pero no todas iguales, por ejemplo si tenemos 6 raíces $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ verificando:

$$r_1 \neq r_2 = r_3 \neq r_4, \quad r_1 \neq r_4 = r_5 = r_6.$$

Entonces, la solución es:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 x e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} + c_5 x e^{r_5 x} + c_6 x^2 e^{r_6 x}.$$

Si las raíces son complejas, para cada par conjugado, $r = \pm bi$, la solución es:

$$y = e^{ax}(A\cos bx + B\operatorname{sen} bx).$$

Si hay otro par igual $\rightarrow y = e^{ax}(A\cos bx) + B\text{sen}bx)$.

(Ver Ejemplo A.22)

1.8. Matrices.

Una matriz es un conjunto de elementos ordenados en filas y columnas. Se suelen denotar por letras mayúsculas (por ejemplo, A), y a_{ij} representa un elemento individual de la matriz. La coordenada i se refiere a la fila del elemento, y la coordenada j a la columna. En esta sección se sigue principalmente la notación y principales resultados de [13].

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada elemento se distingue de otro por la posición que ocupa en la matriz, es decir la fila y la columna donde se encuentra situado (para mas detalle ver [13]).

1.8.1. Tipos de Matrices

Según la forma y los elementos de la matriz existen varios tipos de matrices y en el Apéndice A.7.1 se describen las más importantes.

1.8.2. Operaciones entre Matrices

Adición y sustracción de matrices.

Para sumar y restar dos matrices (ver [2]), estas deben ser de igual tamaño (mismo número de filas m y columnas n), y se suman o restan sus elementos correspondientemente, es decir,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades.

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento neutro: $A + 0 = A$
- Elemento opuesto: $A + (-A) = O$
- Conmutativa: $A + B = B + A$

(Ver Ejemplo A.26, A.27)

Multiplicación por un Escalar.

Se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar dado.[2]
Sea la matriz A y el escalar K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k * A = \begin{pmatrix} k * a_{11} & k * a_{12} & \dots & k * a_{1n} \\ k * a_{21} & k * a_{22} & \dots & k * a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k * a_{m1} & k * a_{m2} & \dots & k * a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times p$, y $B = [b_{ij}]$ es una matiz de $p \times n$, el producto de A y B, que se denota mediante AB, es la matriz $C = [c_{ij}]$ de $m \times n$, definida como (ver [2]):

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Es decir, los elementos que ocupan la posición ij, en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila i en la primera matriz por los elementos de la columna j de la segunda matriz. Es decir,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Como se observa, según [2], para que se pueda realizar el producto AB, el número de columnas p de A debe ser igual al número de filas p de B. Se revisa en detalle como se obtiene el elemento c_{ij} de la matriz C en el siguiente ejemplo:

(Ver Ejemplo A.28)

Propiedades [13]

1. $A(B+C) = AB + AC$
2. $(A+B)C = AC + BC$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A0_n = 0_nA = 0_n$ (Matriz cuadrada de $n \times n$)
5. $BI_n = I_nB = B$ (Matriz cuadrada de $n \times n$)
6. $En\ general, AB \neq BA$ (La multiplicación no es conmutativa)
7. $AB = 0$ no implica necesariamente que $A = 0$ o $B = 0$
8. $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$

(Ver Ejemplo A.29)

1.8.3. Determinantes

Definicion 1.8. *El determinante es una función que establece una correspondencia entre el conjunto de matrices cuadradas y el campo de los números reales o complejos.*

$$f : M_{n\times n} \to K$$
$$A \to f(A) = det(A)$$

Notación. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$, el determinante de A se nota así:

$$|A| = det(A)$$

o también:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

De acuerdo con [2]:

$$det(A) = |A| = \sum(\pm)a_{1j_1}, a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

donde la suma varía sobre las permutaciones $j_1, j_2, ..., j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, ..., n\}$. El signo es $(+)$ si la permutación es par o $(-)$ si es impar.

De acuerdo con [2], Se dice que una permutación tiene una inversión si un entero mayor j_r precede a uno menor j_s, y se dice que es par o impar de acuerdo al numero total de inverisones en ella.

Por ejemplo, la permutación 3412 de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ tiene cuatro inversiones y por tanto es par: 3 antes de 1, 3 antes de 2, 4 antes de 1, 4 antes de 2; en cambio la permutación 1243 tiene una inversión y por tanto es impar: 4 antes de 3.

(Ver Ejemplo A.30)

Propiedades.

1. Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$det\ (AB) = (det\ A)(\ det\ B).$$

   Es decir: el determinante del producto es el producto de los determinantes.

2. $det(A^T) = det(A)$.

3. El $det(A)$ puede calcularse, según [13], como:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

(Ver Definición 1.9)

Definicion 1.9. ***Menores y cofactores de una matriz***
Según la [13], si A es una matriz cuadrada, entonces el menor M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Y con esto el cofactor A_{ij} se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Por lo que el determinante de la matriz A está dado por:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, se puede calcular *det A* expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A. Más aún

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ se puede calcular $det(A)$ expandiendo por cofactores en cualquier columna de A.

(Ver Ejemplo A.31)

1.8.4. Inversa de una matriz

Definicion 1.10. *Una matriz cuadrada A de $n \times n$ es invertible (no singular) si existe una matriz cuadrada B de $n \times n$ y el producto de AB y BA es igual a la matriz Identidad I_n [11], [13], es decir:*

$$AB = BA = I_n$$

La matriz B se denomina inversa de la matriz A, y por tanto, también la matriz A es la inversa de B. Si no existe tal matriz, entonces se dice que A es una matriz no invertible o singular.

(Ver Ejemplo A.32)

Teorema 1.10. *Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de una matriz A se la denota como A^{-1} [11][13].*

Demostración:

Si A es invertible, entonces existe B tal que:

$$AB = BA = I_n$$

Vamos a suponer que la inversa de la matriz A no es única, es decir, existe otra inversa C tal que:

$$AC = CA = I_n$$

De acuerdo con [13]:
$AB = I_n$(B es inversa de A)
$C(AB) = CI_n$
$(CA)B = C$(propiedad asociativa y matriz por Identidad)
$I_nB = C$(C es inversa de A)
$B = C$

Por lo tanto, si $B = C$, y dado que ambas se definieron como inversas de A, la inversa de A es una matriz única, que era lo que se quería demostrar, y con lo que se acepta que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Método para Determinar la inversa de una matriz

Para determinar la inversa de una matriz A, se resuelve la ecuación matricial $AX = I$ para X, donde $A^{-1} = X$.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ para determinar su inversa planteamos la ecuación matricial:

$$AX = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_{11} + 2x_{21} & -x_{12} + 2x_{22} \\ -x_{11} + x_{21} & -x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando se igualan los elementos correspondientes se obtiene dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas:

$$\begin{array}{cc} -x_{11} + 2x_{21} = 1 & -x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ -x_{11} + x_{21} = 0 & -x_{12} + x_{22} = 1 \end{array}$$

Resolviendo por el método de reducción a los dos sistemas de ecuaciones tenemos que $x_{11} = 1$ y $x_{21} = 1$, así como $x_{12} = -2$ y $x_{22} = -1$, respectivamente.

Por lo que,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si alguno de los sistemas de ecuaciones lineales que se forman no tienen solución o tienen infinitas soluciones, entonces la matriz A es no invertible o singular. [13]

Teorema 1.11. ***([13, Th. 3.7]) Determinante de una matriz invertible***
Una matriz cuadrada A tiene inversa A^{-1} si y sólo si $det(A) \neq 0$.

(Ver Ejemplo A.33)

Método para determinar la Inversa de una matriz por su adjunta

Según la Definición 1.9, el adjunto de a_{ij} es el determinante que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j, con el respectivo signo en función de la posición i, j, es decir $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. *Obtener el elemento adjunto de la posición $2, 3$ de la matriz A, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: El procedimiento es sencillo, si quitamos la fila 2 y la columna 3 nuestra matriz de partida y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos el determinante

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Por último, es necesario tener en cuenta la posición del elemento que hemos seleccionado, en este caso, $a_{2,3}$ por lo tanto, el valor del elemento adjunto es

$$M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Definicion 1.11. ***Matriz adjunta.*** *Es la matriz formada por todos los elementos adjuntos definidos anteriomente. [13]*

(Ver Ejemplo A.34)

Teorema 1.12. ***([13, Th. 3.10]) Inversa de una matriz por su adjunta*** *Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces su inversa viene dada por:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)^T$$

Hay que recordar por el Teorema 1.11 que para que una matriz A sea invertible o no singular, $det(A) \neq 0$.

(Ver Ejemplo A.35)

1.8.5. Valores Propios (AutoValores) y Vectores Propios (AutoVectores)

Un vector propio o autovector asociado a una matriz A cuadrada $n \times n$ y correspondiente a un valor escalar λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), es un vector x distinto de cero tal que $Ax = \lambda x$. λ se denomina valor propio o autovalor asociado a la matriz A (Ver [13]). En otras palabras, si $Ax = \lambda x$, entonces existen vectores x distintos de cero en $\mathbb{R}^n$ tales que Ax sea un múltiplo escalar de x. [13]
¿Cómo encontrar x y λ? Según [13], sea I la matriz identidad $n \times n$, se puede escribir la ecuación $Ax = \lambda x$ en la forma $Ax = \lambda Ix$ donde se obtiene:

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ luego } x \in N(A - \lambda I).$$

Como $x \neq 0$, necesitamos que el sistema tenga soluciones no triviales; es decir: λ es valor propio A si y solo si $det(A - \lambda I) = 0$. De acuerdo con [13], el subespacio propio de A correspondiente a $\lambda, V(x)$, es el conjunto de todas las soluciones de $(A - \lambda I)x = 0$, es decir $V(x) = N(A - \lambda I)$. **(Ver Ejemplo A.36)**

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. (2012) *Calculus I.* Barcelona, España: Reverté.

[2] Bernard, K., Hill, D. R. (2006) *Álgebra lineal.* Mexico: Pearson Educación.

[3] Carmona, I. (2011) *Ecuaciones diferenciales.* México: Pearson.

[4] Casteleiro, J. M. (2004) *Introducción al Algebra Lineal, Primera Edición.* Madrid: ESIC Editorial

[5] Chapra, S. C., Canale R. P. (2015) *Métodos numéricos para Ingenieros, Séptima Edición.* México: D.F.: Mc Graw-Hill/Interamericana Editores.

[6] Conejo, L. y Ortega T. (2014) *Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto Números - Revista de Didáctica de las Matemáticas, vol* (87), 5-23.

[7] Del Valle Sotelo, J. D. (2011) *Álgebra lineal: Para estudiantes de Ingeniería y Ciencias.* Monterrey, México: Mc Graw Hill.

[8] Pérez, F. (2017) *Cálculos diferencial e integral de funciones en una variable.* Obtenido de `http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf`

[9] Henry Edwards, D. P. (2009) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México: Pearson.

[10] Hernández, E. (2016) *Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones.* Cartago, Costa Rica: Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[11] Kolman, B. y Hill, D. R. (2006) *Álgebra Lineal.* México: Pearson Eduación.

[12] Larson, R. y Edwards B. (2016) *Cálculo, vol. 1.* México D.F.: Cengage Learning Editores S.A.

[13] Larson, R (2013) *Fundamentos de Algebra Lineal. Septima Edición.* México: Cengage Learning Editores.

[14] Gonzáles, A. (2003) *Calculo I*, Madrid, 54-55.

[15] López, A. I. (2009) *Ecuaciones diferenciales: Teoría y problemas.* Madrid: Editorial Tébar Flores.

[16] Pinta, M., Castillo E. (2015) *Derivación de funciones en una variable.* Machala, Ecuador: Universidad Técnica de Machala.

[17] Stewart, J. (2012) *Calculo de una variables, trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning Editores.

[18] Thomas, G. (2015) *Cálculo. Una variable, Decimotercera Edición.* México: Pearson Education.

[19] Wisniewski, P. y Otros (2015) *Cálculo diferencial e integral, Matemáticas IV.* México: Editorial Trillas.

[20] Zill, D., Cullen M. (2009) *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores de frontera* México: Cengage Learning Editores, S. A.

Apéndice A

A.1. Derivación

Ejemplo A.1.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3} - e^3 + \ln 3 - \frac{6}{x}$$
$$f(x) = x^3 - x^{-3} - e^3 + \ln 3 - 6x^{-1}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3x^{-4} - 0 + 0 - 6x^{-2}$$
$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2}$$

Ejemplo A.2.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^5}{x^2 - 8}$$
$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x^4)(x^2 - 8) - 2x(x^3 + 2x^5)}{(x^2 - 8)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3x^4 - 24x^2 + 10x^6 - 80x^4 - 2x^4 - 4x^6}{(x^2 - 8)^2}$$
$$f'(x) = \frac{6x^6 - 79x^4 - 24x^2}{(x^2 - 8)^2}$$

Ejemplo A.3.

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1}$$
$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{x.e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo A.4.

$$f(x) = \ln(\operatorname{sen} x \cos x)$$

$$f(x) = \ln \operatorname{sen} x + \ln \cos x$$
$$f(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} + \frac{(\cos x)'}{\cos x}$$
$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$$
$$f(x) = \cot x - \tan x$$

Ejemplo A.5.

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x^2$$
$$f(x) = (\cos x)^2 + \cos(x^2)$$
$$f'(x) = 2(\cos x)\frac{d}{dx}(\cos x) + \left[-\operatorname{sen}(x^2)\frac{d}{dx}x^2\right]$$
$$f'(x) = 2(\cos x)(-\operatorname{sen} x) + [-\operatorname{sen}(x^2)2x]$$
$$f'(x) = -2\operatorname{sen} x \cos x - 2x\operatorname{sen}(x^2)$$
$$f'(x) = -2(\operatorname{sen} x \cos x + x\operatorname{sen}(x^2)$$

Ejemplo A.6.

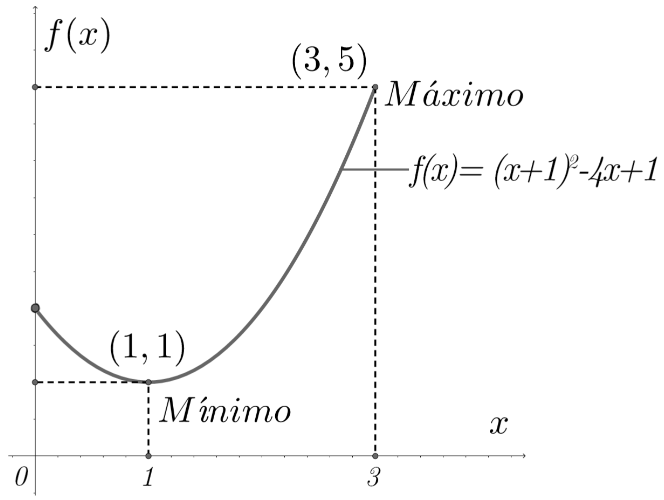
Dado $y = \ln x$, hallar su tercera derivada.

$$y = \ln x$$
$$y' = \frac{1}{x}$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$
$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}.$$

A.2. Valor Extremo

Ejemplo A.7. *Siendo $f(x) = (x+1)^2 - 4x + 1$ en el intervalo cerrado $[0, 3]$, se obtiene gráficamente que el mínimo absoluto en $x = 1, f(1) = 1$, y el máximo absoluto en $x = 3, f(3) = 5$.*

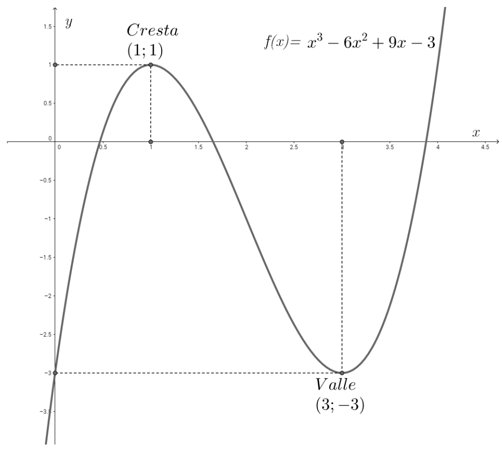
Figura A.1: Valores máximos y mínimos de una función continua en un intervalo cerrado $[0, 3]$



Fuente: Elaboración Propia

Ejemplo A.8. *Análisis gráfico de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$*

Figura A.2: Extremos relativos en una función



Fuente: Elaboración Propia

Un máximo relativo (local) ocurre en una "cresta" de la gráfica y un mínimo relativo (local) en un "valle" de la gráfica. En este caso para la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, esta cresta está en el punto $(1, 1)$ siendo este un máximo relativo, y este valle está en $(3,-3)$ siendo este un mínimo relativo. Además si determinamos la derivada de la $f(x)$ en los extremos relativos, demostraremos también que los puntos $x=1$ y $x=3$ son puntos críticos, pues $f'(1)=0$ y $f'(3)=0$.

$$f'(x)=3x^2-12x+9.$$

Entonces:

$$f'(1)=3(1)^2-12(1)+9=0.$$
$$f'(3)=3(3)^2-12(3)+9=0.$$

A.3. Teorema Rolle

Ejemplo A.9. *Demostrar que $f'(x)=0$ en algún punto entre las dos raíces de la función*

$$f(x)=x^2-4x+3$$

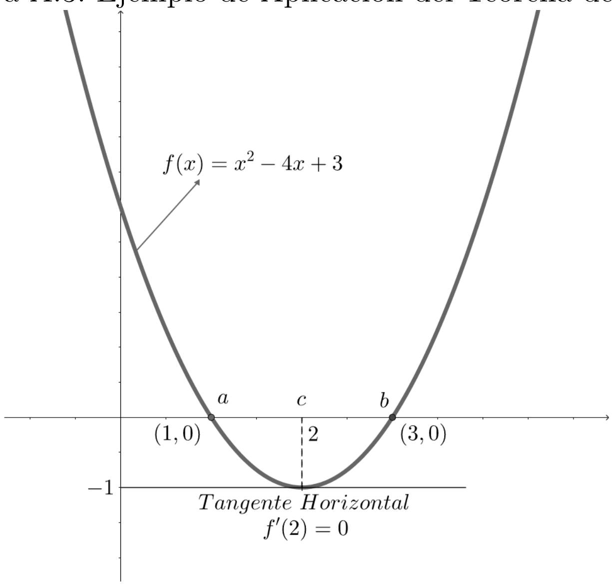
Solución: $f(x)$ es un polinomio de segundo grado y derivable en $\mathbb{R}$.

Para determinar las raíces:

$$f(x)=x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0 \Rightarrow x=3 \vee x=1$$

Por lo tanto, y de acuerdo al teorema de Rolle, si $f(1)=f(3)=0$, f es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$, entonces $\exists c \in (1,3)$, tal que $f'(c)=0$. Ahora podemos determinar este punto c derivando $f(x)$ e igualando a 0:
$f'(x)=2x-4 \Rightarrow \exists c \in (1,3)$, tal que $f'(c)=2c-4=0$, por lo tanto, $c=2$.

Figura A.3: Ejemplo de Aplicación del Teorena de Rolle



Fuente: Elaboración Propia

Entonces, el teorema de Rolle también aplica de manera particular cuando

$f(a) = f(b) = 0$ [10], y en este punto c donde $f'(c) = 0$, pasa una tangente horizontal.

A.4. Teorema Valor Medio

Ejemplo A.10. *La función* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$ *es continua en* $[-1, 2]$ *y derivable en* $(-1, 2)$*, por lo que, según el teorema del valor medio, existe un número* $c \in (-1, 2)$ *tal que:*

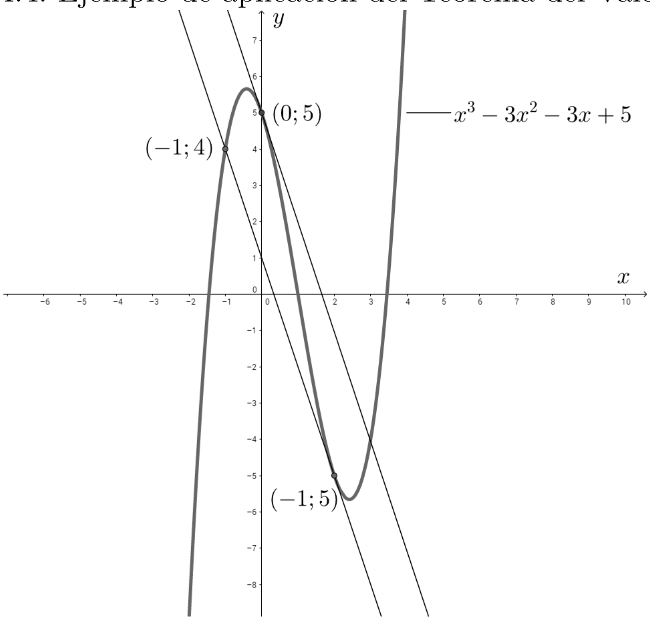
1. $$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$$

   Es decir,

2. $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 - 3(2) + 5 = -5$
3. $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 5 = 4$
4. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$ y por tanto $f'(c) = 3c^2 - 6c - 3$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1)
$3c^2 - 6c - 3 = \dfrac{-5 - 4}{2 - (-1)} = -3 \Rightarrow 3c^2 - 6c = 0 \Rightarrow 3c(c - 2) = 0 \Rightarrow c = 0 \vee c = 2$
Como $c \in (-1, 2)$, entonces $c = 0$ es el valor que cumple el teorema, y como $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 - 3(0) + 5 = 5$, se puede asegurar que por el punto $(0, 5)$ pasa una tangente paralela a la secante que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(2, -5)$.

Figura A.4: Ejemplo de aplicación del Teorema del Valor medio.



Fuente: Elaboración Propia

A.5. Integración

Tabla A.1: Fórmulas de integración inmediatas.

Nº	*Fórmulas de Integración*
1	$\int dx = x + c$, $c =$ Constante de Integración
2	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3	$\int axdx = a\int xdx$, $a =$ constante
4	$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
5	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$, $a > 0$,$a \neq 1$
6	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c,$
7	$\int e^u du = e^u + c$
8	$\int \mathrm{sen} u du = -\cos u + c$
9	$\int \cos u du = \mathrm{sen} u + c$
10	$\int \tan u du = \ln\lvert\sec u\rvert + c$
11	$\int \cot u du = \ln\lvert\mathrm{sen} u\rvert + c$
12	$\int \sec u du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + c$
13	$\int \csc u du = -\ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + c$
14	$\int \sec^2 u du = \tan u + c$
15	$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$
16	$\int \sec u. \tan u du = \sec u + c$
17	$\int \csc u. \cot u du = -\csc u + c$
18	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$
19	$\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + c$
20	$\int \dfrac{du}{u}\sqrt{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{u}{a} + c$
21	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\rvert + c$
22	$\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\lvert\dfrac{a+u}{a-u}\rvert + c$

23	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+c$
24	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+c$
25	$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a}+c$
26	$\int \sqrt{u^2+a^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+c$
27	$\int \sqrt{u^2-a^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2}-\frac{1}{2}a^2\ln\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\rvert+c$

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo A.11.

$$\int 3^{5x}dx$$

Completando el diferencial con 5, por lo cual, multiplicamos por 5 el integral y por $\frac{1}{5}$ el integral

$$\frac{1}{5}\int 3^{5x}5dx$$

Aplicando la Fórmula 5 de la Tabla A.1

$$\frac{3^{5x}}{5.\ln(3)}$$

Ejemplo A.12.

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$$

Reemplazamos la identidad

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$$

Aplicando la Fórmula 9 de la Tabla A.1

$$\int \frac{1+\cos x}{2}dx$$

$$\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos x dx$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{sen}x+c$$

Ejemplo A.13.

$$\int \sec^2(3x)dx$$

$$du = 3dx$$
$$u = 3x$$

Tenemos que completar el diferencial con 3; para lo cual multiplicamos por 3 el integrando y por $\frac{1}{3}$ a la integral.

Aplicando fórmula 14 de la Tabla A.1

$$\frac{1}{3}\int \sec^2(3x)(3)dx$$

$$\frac{1}{3}\tan(3x)+c$$

Ejemplo A.14.

$$\int \frac{dx}{16+4x^2}$$

$$a^2 = 16;\ u^2 = 4x^2$$
$$a = 4;\ u = 2x$$

Tenemos que completar el diferencial con 2; para lo cual multiplicamos el integrando por 2 y el integral por $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(4)^2+(2x)^2}$$

Aplicando fórmula 20 de la Tabla A.1

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\arctan\frac{2x}{4}\right)+c$$

$$\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

A.5.1. Integración Por Partes

Ejemplo A.15.

$$\int x\ln x dx$$

Hacemos:

$u = \ln x$, $dv = xdx$ *(es la parte que se puede integrar)*

Luego:

$$du = \tfrac{1}{x}dx,\ \int dv = \int xdx$$

De donde:

$$du = \tfrac{1}{x}dx,\ v = \tfrac{x^2}{2}$$

Aplicando la formula 1.3 de integración por partes tenemos:

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2x}dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Ejemplo A.16.

$$\int_1^3 x e^x dx$$

Hacemos

$$u = x, \ dv = e^x$$

Por lo que

$$du = dx \ y \ v = e^x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int_1^3 x e^x dx = [x e^x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx$$

$$= [x e^x - e^x]_1^3 = [e^x(x-1)]_1^3 = e^3(3-1) - e(1-1) = 2e^3$$

A.5.2. Teoremas Fundamentales del Cálculo

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Ejemplo A.17. *Como ejemplo de aplicación de este teorema tenemos:*

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Ejemplo A.18.

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3}$$

A.6. Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo A.19. *Sea la ecuación diferencial:*

$$(y''')^2 + 2y'' + (y')^3 = 27x^6 + 12x + 42$$

Es de tercer orden, por ser y''' la derivada de mayor orden en la ecuación.
Es de segundo grado, por estar elevada al exponente 2, la derivada de mayor orden.

A.6.1. Solución de una Ecuación Diferencial

Ejemplo A.20. *Sea la ecuación diferencial*

$$y' + y = 0$$

Su solución general es:

$$y = Ce^{-x}$$

La cual verificamos si reemplazamos ésta solución y su derivada $y' = -Ce^{-x}$*, en la ecuación diferencial:*

$$y' + y = 0$$
$$-Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$$
$$0 = 0$$

A.6.2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Ejemplo A.21. *Sea la ecuación de variables separables:*

$$\frac{dy}{dx} = y(x+5)$$

Separando tenemos $\frac{dy}{y} = (x+5)dx$ *Integramos ambos lados de la igualdad:*

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x+5)dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + 5x + C$$
$$y = e^{x^2+5x+C} = e^C.e^{x^2+5x}$$
$$y = C.e^{x^2+5x}$$

A.6.3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes de Enésimo Orden.

Ejemplo A.22. $y'' + 5y' + 6 = 0$*, es una ecuación lineal homogénea de 2do orden con coeficientes constantes.*

Su ecuación algebraica característica es: $r^2 + 5r + 6 = 0$*, que tiene como raíces a* $r_1 = 2r_2 = 3$ *, que estarían en el caso de raíces reales distintas y su solución es:* $Y' = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

A.7. Matrices

Durante esta sección vamos a poner distintos tipos de matrices en función de su forma y sus valores. Ver más información y más ejemplos en [2], [4], [7] y [13].

A.7.1. Tipo de Matrices

- **Matriz Rectangular** Es aquella que tiene un número distinto de filas y columnas. Su orden es (m, n).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz Fila** También llamado vector fila, es aquella que solo posee una fila.

$$A = (a_{11}\ a_{11}\ ...\ a_{1n})$$

- **Matriz Columna.-** También llamado vector columna, es aquella que solo posee una columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- **Matriz Nula o Matriz Cero.-** Es aquella que posee todos sus términos nulos y puede ser de cualquier orden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Cuadrada.-** Es aquella que tiene un mismo número de filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

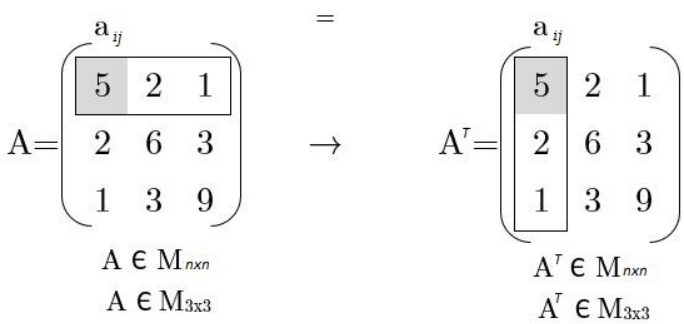
- **Matriz Diagonal.-** Es aquella matriz cuadrada que posee sus términos nulos a excepción de su diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

- **Matriz Escalar.-** Es aquella matriz diagonal cuyos elementos de su diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Transpuesta.-** Dada una matriz A, se le llama matriz transpuesta (A^t) de A, a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente sus filas por sus columnas.



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo A.23. *Hallar la matriz transpuesta de la matriz A:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz Transpuesta de A es:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Identidad.-** Es aquella matriz diagonal en la que sus elementos de su diagonal principal son iguales a la unidad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Opuesta o Inverso Aditivo.-** Se dice que una matriz es la opuesta de una matriz dada (A), cuando posee todos los términos iguales y contrarios, se denota por $(-A)$.

  Ejemplo A.24. *Hallar la matriz opuesta de la siguiente matriz A:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ -8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

  La matriz Opuesta de la matriz A será:

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -6 & 1 & 4 \\ 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Superior.-** Es aquella matriz cuadrada cuyos términos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Inferior.-** Es aquella matriz cuadrada cuyos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

- **Matriz Simétrica.-** Una matriz simétrica es aquella en la que su transpuesta es igual a la misma matriz $A = A^T$, cumpliendo con las siguientes características:

  - La matriz debe ser cuadrada
  - $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$

  Si $A \in M_{mxn}$ y A es simétrica, entonces $A = A^T \in M_{mxn}$, y por tanto $m = n$; ya que dos matrices que son iguales deben tener el mismo tamaño, de la misma forma la diagonal principal permanece fija después de la transposición.

  Ejemplo A.25. *Para comprobar si una matriz es simétrica, debemos sacar su transpuesta, en este caso tenemos la matriz A, aplicamos la transpuesta invirtiendo las filas de la matriz mencionada por columnas. Si al obtener su transpuesta nos resulta la misma matriz, es decir sus valores no cambian, podemos concluir que la matriz es simétrica.*

  Por tanto A es simétrica.

A.7.2. Adición y sustracción de matrices.

Ejemplo A.26. $$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 8\end{pmatrix}$$

Se Suman por posiciones como se lo detallo con anterioridad

$$\begin{pmatrix}1+5 & 3-2\\ 0-1 & 2+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1\\ -1 & 10\end{pmatrix} = \text{MatrizResultante.}$$

Ejemplo A.27. *Sean* $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

La suma y resta entre A y B no está definida por que la matriz A es de orden 3×3 *y la matriz B es de orden* 3×2.

A.7.3. Multiplicación de Matrices

Ejemplo A.28.

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 2 & 14\\ 0 & 4 & 7\\ -8 & 0 & 12\end{pmatrix} = C$$

Dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. En ese caso se dice que las matrices son enlazadas.[13] [2]

Ejemplo A.29. *Hallar el producto de dos matrices.*
Encuentre el producto AB usando:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

1er paso: Multiplicar cada uno de los reglones de A por cada una de las columnas de B.

$$AB = \begin{pmatrix}1(4)+2(3) & 1(2)+2(5)\\ 1(4)+3(3) & 1(2)+3(5)\\ 1(4)+4(3) & 1(2)+4(5)\end{pmatrix}$$

2do paso: Sumamos el resultado de las multiplicaciones.

$$AB = \begin{pmatrix}4+6 & 2+10\\ 4+9 & 2+15\\ 4+12 & 2+20\end{pmatrix}$$

Como Matriz resultante tenemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 13 & 17 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$$

A.7.4. Determinantes

Ejemplo A.30. *Sí* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *para calcular* $det(A)$ *escribimos los seis términos (como* A *es* 3×3*,* $S = \{1, 2, 3\}$ *y por tanto hay seis permutaciones en* $S : 123, 231, 312, 132, 213$ *y* 321*) así:*

$$\begin{matrix} a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \\ a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \end{matrix}$$

y llenamos los subindices de acuerdo a las permutaciones de S *y los signos según sean par* $(+)$ *o impar* $(-)$*.*

$$det(A) = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

Ejemplo A.31. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *Calcule* $|A|$ *expandiendo por cofactores*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(2)(4) - (2)(3)] - 5[(4)(4) - (-1)(3)] + 2[(4)(2) - (-1)(2)]$$

$$= 3(2) - 5(19) + 2(10) = 6 - 95 + 20 = -69$$

A.7.5. Inversa de una matriz

Ejemplo A.32.

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y dado que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) + 3(1) & 2(3/2) + 3(-1) \\ 2(-1) + 2(1) & 2(3/2) + 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y que

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(2) + (\frac{3}{2})(2) & (-1)(3) + (\frac{3}{2})(2) \\ 1(2) + (-1)(2) & 1(3) + (-1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, $AB = BA = I_n$

Se concluye que la inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *es* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *además de que* A *es no singular.*

Ejemplo A.33. *Determine cuál de las siguientes matrices es invertible:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) - 1(1) + (-1)(1) - 0(2) = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -[(1)(1) - (1)(2)] + 2[(0)(1) - (1)(1)] = -1$$

Por lo anterior, la matriz A *es no invertible o singular, y la matriz* B *es invertible o no singular, es decir, existe* B^{-1}.

Ejemplo A.34. *Determine la matriz adjunta de* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Obteniendo los cofactores para la matriz A*, tenemos:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(2) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -[(0)(1) - (1)(2)] = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (1)(1) = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -[(0)(1) - (1)(2)] = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (1)(2) = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -[(-1)(1) - (1)(0)] = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (0)(2) - (1)(2) = -2$$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -[(-1)(2) - (0)(2)] = 2$
$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (0)(0) = -1$
Por lo que la matriz de cofactores de A está dada por:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por definición, la adjunta de A es la transpuesta de su matriz de cofactores, así:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo A.35. *Determine la inversa de la matriz dada utilizando su adjunta.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Vamos utilizar el Teorema 1.12 que indica que:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ \textit{Ver ejemplo A.33}}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ \textit{Ver ejemplo A.34}}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar el resultado comprobando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

A.7.6. Valores Propios (Autovalores) y Vectores Propios (AutoVectores)

Ejemplo A.36. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Determinar sus valores y vectores propios.

Solución:
Se forma el polinomio característico:
$det(A - \lambda I) = 0$*, siendo I la matriz identidad de orden 2.*

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = 0$$

$$-12 - 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

$$(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$$

Es un polinomio de grado dos que tiene dos soluciones, dichas soluciones representan a los valores propios.

$$(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -7$$

$$\lambda_2 = 3$$

Tenemos dos valores propios $\lambda_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = -7$*.*

Para encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio tenemos que buscar los vectores tales que $(A - \lambda I)x = 0$*.*
Es decir, buscamos $x \in N(A - \lambda I)$ *para cada uno de los valores propios que hemos encontrado.*

Caso $\lambda = 3$

$$(A - \lambda I)x = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ siendo\ x = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos el valor de $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 3 \\ 3 & -6-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una vez reemplazado el valor obtenemos las ecuaciones multiplicando las ma-

trices.

$$\begin{Bmatrix} -V_1 + 3V_2 = 0 \\ 3V_1 - 9V_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificamos la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} -V_1 + 3V_2 = 0 \\ -V_1 + 3V_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Al final obtendremos dos ecuaciones iguales y podemos eliminar una de las dos para que así nos quede solamente una ecuación y luego las igualamos para poder definir los vectores propios de la matriz.

$$-V_1 + 3V_2 = 0$$

$$3V_2 = V_1$$

Reemplazamos en la matriz de vectores:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3V_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Cuando $V_1 = 3$, $V_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y esta matriz es uno de los vectores propios de la matriz A.
Caso $\lambda = -7$

$$(A - \lambda I)x = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \textit{siendo } x = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos el valor de $\lambda = -7$

$$\begin{pmatrix} 2+7 & 3 \\ 3 & -6+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una vez reemplazado el valor obtenemos las ecuaciones multiplicando las matrices

$$\begin{Bmatrix} 9V_1 + 3V_2 = 0 \\ 3V_1 + V_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificamos la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} 3V_1 + V_2 = 0 \\ 3V_1 + V_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Al final obtendremos dos ecuaciones iguales y podemos eliminar una de las dos para que así nos quede solamente una ecuación y luego las igualamos para poder definir los vectores propios de la matriz.

$$3V_1 + V_2 = 0$$

$$-3V_1 = V_2$$

Reemplazamos en la matriz de vectores:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ -3V_1 \end{pmatrix}$$

Cuando $V_1 = -1$, $V_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y esta matriz es uno de los vectores propios de la matriz A.
Entonces los Vectores Propios de la Matriz A son: $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\overrightarrow{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

A.8. Ejercicios Propuestos

En las referencias del Capítulo 1 podemos encontrar multitud de ejercicios propuestos y resueltos, vamos a hacer una selección de los más representativos y añadir algunos propios.

Ejercicio A.1. *Demostrar que la ecuación* $e^{-x} + 3 = x$ *tiene al menos una solución real. Aplique el Teorema de Bolzano.*

Ejercicio A.2. *Demuestra que la función* $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *corta al eje de las abscisas en el intervalo* $[0, 3]$. *¿Se puede decir lo mismo de la función:*

$$f(x) = \frac{(3x-2)}{(x-1)}$$

Ejercicio A.3. *Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación* $x^3 + x - 6 = 0$, *tiene al menos una solución* $x = c$ *tal que* $1 \leq c \leq 3$.

Ejercicio A.4. *Utilizando el Teorema de Bolzano, justifique que la función polinómica* $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *tiene un cero comprendido entre* -1 *y* 0.

Ejercicio A.5. *Obtenga el valor o los valores de c que satisfacen la ecuación:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

En la conclusión del teorema del valor medio para las funciones y los intervalos de los siguientes ejercicios.

1. $f(x) = x^3 - x^2, [-1, 2]$

2. $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^3, & -2 \le x \le 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2 \end{array} \right\}$

Ejercicio A.6. *¿Cuál de las funciones de los ejercicios satisfacen la hipótesis del teorema del Valor Medio en el intervalo dado, y cuáles no? Justifique su respuesta.*

1. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}, [-3, 0]$

2. $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^3 - x \quad , & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 6x + 9, & -1 \le x \le 0 \end{array} \right\}$

Ejercicio A.7. *Teorema de Rolle.*

1. *Construya un polinomio $f(x)$ que tenga ceros en $x = -2, -1$.*

2. *Sea $f(x) = x^2 + 2 + 14x + 7$ determine todos los valores de c en el intervalo $(-9, 16)$.*

3. *Siendo $f(x) = -18x^2 + 9x + 3$ determine si se puede aplicar el teorema y de ser así calcule todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b).*

Ejercicio A.8.

1. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{2x} + \dfrac{3}{\sqrt{2x}})^2$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$

3. $\dfrac{d}{dx}\ln^2(e^{5x})$

4. $\dfrac{d}{dx}(1 - x^2)^{\sqrt{x}}$

5. $\dfrac{d}{dx}\sec(e^x + x^e)$

6. $\dfrac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen}^2 x)$

7. $\dfrac{d^3}{dx^3}(e^x \cos x)$

Ejercicio A.9. *En los ejercicios siguientes, dibuje la gráfica de cada función y determine si la función tiene valores extremos absolutos en su dominio. Explique de que manera su respuesta es congruente con el teorema de valor extremo.*

1. $y = 6/(x^2 + 2), -1 < x < 1$

2. $h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/x, & -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4 \end{array} \right\}$

Ejercicio A.10. *Encontrar el valor máximo de la siguiente función:*

$$f(x) = \frac{1}{x+5} + \frac{3}{x}$$

Ejercicio A.11. *Encontrar los extremos absolutos de la función:*

$$f(x) = \frac{x}{(4+x)} + 1, 1 \geq x \geq 2$$

Ejercicio A.12. *Resolver las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+9)^3}} dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^3 x}$
4. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3x dx}{\sqrt{\tan 3x - 1}}$
5. $\displaystyle\int x^2 \ln dx$
6. $\displaystyle\int e^x \cos x dx$
7. $\displaystyle\int_{-7}^{9} \sqrt[3]{x-1} dx$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} a^x e^x dx$
9. $\displaystyle\int_{0}^{2} x^2 e^x dx$
10. $\displaystyle\int_{1}^{3} x^2 \ln x dx$

Ejercicio A.13. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.*

1. $3xy\ dx – x^2 y\ dy = 0$
2. $(\ln x + 5)dx + (\ln x – 5)dy = 0$
3. $y' + 7y + 6 = 0$
4. $y'' + y' - 12 = 0$
5. $y''' + y'' - 13y' + 12y = 0$
6. $y^{iv} – 2y'' + y = 0$

Redes

Redes es la materialización del diálogo académico y propositivo entre investigadores de la UTMACH y de otras universidades iberoamericanas, que busca ofrecer respuestas glocalizadas a los requerimientos sociales y científicos. Los diversos textos de esta colección, tienen un espíritu crítico, constructivo y colaborativo. Ellos plasman alternativas novedosas para resignificar la pertinencia de nuestra investigación. Desde las ciencias experimentales hasta las artes y humanidades, Redes sintetiza policromías conceptuales que nos recuerdan, de forma empeñosa, la complejidad de los objetos construidos y la creatividad de sus autores para tratar temas de acalorada actualidad y de demanda creciente; por ello, cada interrogante y respuesta que se encierra en estas líneas, forman una trama que, sin lugar a dudas, inervará su sistema cognitivo, convirtiéndolo en un nodo de esta urdimbre de saberes.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
Editorial UTMACH
Km. 5 1/2 Vía Machala Pasaje
www.investigacion.utmachala.edu.ec / www.utmachala.edu.ec

ISBN: 978-9942-24-104-7
9 789942 241047