

ANÁLISIS DE DATOS AGROPECUARIOS

IVÁN RAMÍREZ-MORALES / BERTHA MAZON-OLIVO



Análisis de Datos Agropecuarios

Iván Ramírez-Morales
Bertha Mazon-Olivo

Coordinadores



Primera edición en español, 2018

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa editorial de la UTMACH

Ediciones UTMACH

Gestión de proyectos editoriales universitarios

302 pag; 22X19cm - (Colección REDES 2017)

Título: Análisis de Datos Agropecuarios. / Iván Ramírez-Morales
/ Bertha Mazon-Olivo (Coordinadores)

ISBN: 978-9942-24-120-7

Publicación digital

Título del libro: Análisis de Datos Agropecuarios.

ISBN: 978-9942-24-120-7

Comentarios y sugerencias: editorial@utmachala.edu.ec

Diseño de portada: MZ Diseño Editorial

Diagramación: MZ Diseño Editorial

Diseño y comunicación digital: Jorge Maza Córdova, Ms.

© Editorial UTMACH, 2018

© Iván Ramírez / Bertha Mazón, por la coordinación

D.R. © UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA, 2018

Km. 5 1/2 Vía Machala Pasaje

www.utmachala.edu.ec

Machala - Ecuador

Advertencia: “Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro, existente o por existir, sin el permiso previo por escrito del titular de los derechos correspondientes”.



César Quezada Abad, Ph.D
Rector

Amarilis Borja Herrera, Ph.D
Vicerrectora Académica

Jhonny Pérez Rodríguez, Ph.D
Vicerrector Administrativo

COORDINACIÓN EDITORIAL

Tomás Fontaines-Ruiz, Ph.D
Director de investigación

Karina Lozano Zambrano, Ing.
Jefe Editor

Elida Rivero Rodríguez, Ph.D
Roberto Aguirre Fernández, Ph.D
Eduardo Tusa Jumbo, Msc.
Irán Rodríguez Delgado, Ms.
Sandy Soto Armijos, M.Sc.
Raquel Tinóco Egas, Msc.
Gissela León García, Mgs.
Sixto Chilinguina Villacis, Mgs.

Consejo Editorial

Jorge Maza Córdova, Ms.
Fernanda Tusa Jumbo, Ph.D
Karla Ibañez Bustos, Ing.

Comisión de apoyo editorial

Índice

Capítulo I

Ciencia de datos en el sector agropecuario 12
Iván Ramírez-Morales; Bertha Mazon-Olivo ;Alberto Pan

Capítulo II

Obtención de datos en sistemas agropecuarios 45
Salomón Barrezueta Unda; Diego Villaseñor Ortiz

Capítulo III

Internet de las cosas (IoT) 72
Dixys Hernández Rojas; Bertha Mazon-Olivo; Carlos Escudero

Capítulo IV

Matemáticas aplicadas al sector agropecuario 101
Bladimir Serrano; Carlos Loor; Eduardo Tusa

Capítulo V

Estadística básica con datos agropecuarios 127

Irán Rodríguez Delgado; Bill Serrano; Diego Villaseñor Ortiz

Capítulo VI

Estadística predictiva con datos agropecuarios 218

Bill Serrano; Irán Rodríguez Delgado

Capítulo VII

Inteligencia de negocios en el sector agropecuario 246

Bertha Mazon-Olivo; Alberto Pan; Raquel Tinoco-Egas

Capítulo VIII

Inteligencia Artificial aplicada a datos agropecuarios 278

Iván Ramírez-Morales; Eduardo Tusa; Daniel Rivero

Introducción

El análisis de datos es un proceso complejo que trata de encontrar patrones útiles y relaciones entre los datos a fin de obtener información sobre un problema específico y de esta manera tomar decisiones acertadas para su solución.

Las técnicas de análisis de datos que son exploradas en el presente libro son actualmente utilizadas en diversos sectores de la economía. En un inicio, fueron empleadas por las grandes empresas a fin de incrementar sus rendimientos financieros.

El libro se basa en la aplicación de la especialización inteligente, de este modo, gracias al trabajo colaborativo, se combina al sector agropecuario con las tecnologías, matemáticas, estadística y las ciencias computacionales, para la optimización de los procesos productivos.

La idea de descubrir la información oculta en las relaciones entre los datos, incentiva a encontrar aplicaciones para el sector agropecuario, por ejemplo los obtenidos de una producción avícola, o los datos que se generan durante los procesos de fermentación, los parámetros físicos y químicos del suelo, del agua y de las plantas, los datos de sensores, de espectrometría, entre otros.

En la actualidad, este sector se ha mantenido con su producción habitual sin un destacado repunte ni diferenciación, a pesar de existir herramientas científicas que han permitido desarrollar dispositivos tecnológicos y sus aplicaciones.

Este libro ha sido el resultado de la sistematización de las experiencias individuales de un equipo humano con objetivos comunes y una historia académica multidisciplinar, cuyos hallazgos de investigación han sido publicados en revistas científicas y conferencias de alto impacto. El área temática sobre la que se centra este texto es en técnicas de extracción, procesamiento y análisis de datos del ámbito agropecuario, se combinan para entregar al lector una obra de calidad y alto valor científico.

Así, el presente libro está concebido desde diferentes puntos de vista de profesionales agrónomos, informáticos, electrónicos, matemáticos, estadísticos y empresarios. Todos buscan un objetivo en común: “descubrir el conocimiento oculto en los datos que proporcione una ventaja competitiva”. Se aborda el ciclo completo del proceso de obtención de conocimiento a partir de datos crudos del sector agropecuario, con la finalidad de apoyar la toma de decisiones. Este ciclo involucra procesos de: selección de los datos (extracción, comunicación, almacenamiento), pre-procesamiento, transformación, aplicación de modelos y/o técnicas de análisis, presentación e interpretación de resultados. El enfoque temático del libro es el siguiente:

Capítulo 1: Ciencia de Datos en el sector Agropecuario.- En este capítulo se aborda una revisión desde los inicios del análisis de datos en el sector agropecuario hasta el progreso actual que se ha dado en esta área del conocimiento que se considera como la nueva revolución en la agricultura y la ganadería de precisión.

Capítulo 2: Obtención de datos en sistemas agropecuarios.- El enfoque del capítulo es la generación de datos crudos en los sistemas agropecuarios, aplicando métodos y técnicas básicas donde se registran información de: número de unidades producidas, cantidad de nutrientes, variables climáticas, muestreo y monitoreo de organismos vivos, entre otros.

Capítulo 3: Internet de las cosas (IoT).- Este capítulo aborda los sistemas de telemetría para obtención de datos y control de dispositivos, aplicando tecnologías como: redes de sensores inalámbricos (dispositivos electrónicos, sensores, actuadores y puertas de enlace), protocolos de comunicación, centros de procesamiento de datos (cloud computing) y aplicaciones IoT para el sector agropecuario.

Capítulo 4: Matemáticas aplicadas al sector agropecuario.- Este capítulo explica los procedimientos para la creación de modelos matemáticos determinísticos que representen procesos asociados al sector agropecuario, como una alternativa de solución en la ingeniería.

Capítulo 5: Estadística básica con datos agropecuarios.- El capítulo se enfoca en los atributos, escalas de medición de las variables, su influencia en la elección del procedimiento estadístico a desarrollar, así como, el papel de las medidas de resumen, estimación puntual y prueba de hipótesis en la investigación científica.

Capítulo 6: Estadística predictiva con datos agropecuarios.- El capítulo considera las principales técnicas de la estadística avanzada aplicada al sector agropecuario, con el propósito de establecer predicciones que permita tomar mejores decisiones.

Capítulo 7: Inteligencia de negocios en el sector agropecuario.- El capítulo comprende la obtención de conocimiento a partir de datos crudos con la finalidad de apoyar la toma de decisiones en empresas del sector agropecuario. Involucra procesos de extracción, transformación y almacenamiento de datos en nuevos almacenes (Data warehouse - Big Data), distribución y análisis de la información con técnicas: multi-dimensional OLAP y tableros de control (dashboards).

Capítulo 8: Inteligencia Artificial aplicada a datos agropecuarios.- El capítulo trata sobre las principales técnicas de machine learning aplicadas a los datos agropecuarios, entre éstas se destacan: las redes de neuronas artificiales, máquinas de soporte de vectores, vecinos más cercanos, análisis de componentes principales, entre otros.

04 Capítulo Matemáticas aplicadas al sector agropecuario

Bladimir Serrano; Carlos Loor; Eduardo Tusa

Este capítulo explica los procedimientos para la creación de modelos matemáticos que representen procesos asociados al sector agropecuario, como una alternativa de solución en la ingeniería. Se hace una breve explicación introductoria

Bladimir Serrano: Ingeniero Civil, Máster Universitario en Ingeniería Computacional y Matemática, de la Universidad Rovira y Virgili, donde obtuvo una mención en Modelación y Simulación de Eventos Discretos, Docente de la UTMACH, desde Mayo del 2009, dictando las cátedras de Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales, Estadística Descriptiva e Inferencial, Física I y Física II, en las Carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Acuícola, Ingeniería Agronómica y Medicina Veterinaria, hasta febrero del 2017.

Carlos Loor: Ingeniero en Electricidad Especialización Electrónica de la Escuela Superior Politécnica del Litoral. Magíster en Educación Superior de la Universidad Tecnológica San Antonio de Machala. Máster Universitario en Ingeniería Electromecánica de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), donde obtuvo una mención en Métodos Numéricos. Actualmente, es candidato a PhD en Diseño, Fabricación y Gestión de Proyectos Industriales en la UPM. Es docente de la Unidad Académica de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica de Machala, donde ha impartido las asignaturas de Mecánica Técnica I (Estática), Mecánica Técnica II (Dinámica) y Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Integral.

Eduardo Tusa: Ingeniero Electrónico (Magna Cum Laude) con una Subespecialización en Matemáticas de la Universidad San Francisco de Quito. Su cuarto año de formación de pregrado fue realizado en la Universidad de Illinois en Urbana - Champaign, USA. Máster en Visión, Imagen y Robótica (con distinción) de la Universidad de Borgoña (Francia), la Universidad de Girona (España) y la Universidad Heriot-Watt (Reino Unido). Actualmente, es doctorando en la especialidad de Señales, Imágenes, Voz, Telecomunicaciones en la Universidad Grenoble Alpes a través del Instituto Nacional de Investigación en Ciencia y Tecnología para el Ambiente y la Agricultura (IRSTEA, por sus siglas en Francés). Es docente de la Universidad Técnica de Machala, donde ha impartido las asignaturas de Programación en MATLAB, Informática, Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales, Matemática Avanzada, Probabilidad y Estadística

de los modelos matemáticos, ilustrando la idea de modelos compartimentales para posteriormente, exponer los tipos de modelos matemáticos. A continuación, se revisa los principales aspectos de las ecuaciones diferenciales como herramientas para el planteamiento de modelos matemáticos determinísticos. Los modelos matemáticos se presentan de forma analítica y gráfica a través de implementaciones computacionales en el programa MATLAB.

1. Introducción

En la actualidad, se ha incrementado la necesidad de introducir los modelos y herramientas matemáticas en nuestras investigaciones. La utilización e interpretación adecuada de estas técnicas permiten la toma de decisiones óptimas para favorecer el desarrollo de los sistemas productivos. El carácter integral en la solución de las tareas científicas y económicas, así como la eficiencia de los métodos utilizados para influir sobre los objetivos de trabajo, exigen una alta preparación del especialista para emitir criterios con altos niveles de fiabilidad en los procesos agrícolas.

Por otra parte, el aumento progresivo de la población mundial, junto a la creciente necesidad de garantizar la alimentación de ésta, sumado a los cambios climáticos; han conllevado al constante desarrollo de la investigación agrícola. Para realizar estudios y proyecciones futuras sobre procesos agrícolas, se hace imprescindible conocer: ¿Cómo lograr mayores niveles de eficacia en el proceso de toma de decisiones?, ¿Qué métodos matemáticos permiten analizar datos con el fin de obtener conclusiones científicas? ¿Cómo fortalecer las investigaciones de los procesos agropecuarios utilizando la Matemática Aplicada? Esta disciplina en las ciencias agropecuarias permite brindar criterios y herramientas básicas para manejar problemas, recurriendo incluso, a la utilización de nuevas tecnologías con el fin de hacerle frente a objetos de estudio altamente complejos.

El presente capítulo tiene como punto de partida, la estructuración de los modelos matemáticos, su representación y sus tipos, para centrarnos principalmente en la generación

de modelos determinísticos mediante la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales y su programación en MATLAB (Moore 2014).

2. Modelos matemáticos

Un primer acercamiento al modelamiento matemático parte desde su principal propósito. Los modelos constituyen representaciones, patrones, descripciones o analogías que persiguen la visualización de un determinado objeto de estudio que no puede ser valorado directamente, o del cual se desprende un conjunto de postulados, datos o inferencias reproducidas mediante expresiones matemáticas (Fowler and Fowler 1997). Un modelo matemático puede ser concebido como una representación en términos matemáticos del comportamiento de dispositivos y objetos reales (Fishwick 2007).

Un modelo matemático puede representar una simplificación o abstracción de un sistema real que existe en el universo. Así, el modelamiento matemático puede apreciarse en el crecimiento y decaimiento de las poblaciones de animales y seres humanos. Por ejemplo, la industria pesquera debería estar interesada en el efecto de la pesca sobre el crecimiento poblacional de los peces con la finalidad de no agotar este recurso. Inicialmente, se puede asumir un comportamiento exponencial de la población, y más adelante se pueden incorporar otros efectos, como los periodos de reproducción de ciertas especies.

La modelización matemática puede resumirse en tres pasos:

1. La construcción del modelo, es la transformación del sistema no matemático en el lenguaje matemático.
2. El análisis del modelo, consiste en el estudio sistemático del modelo.
3. La interpretación del análisis matemático, es la aplicación de los resultados del estudio matemático al sistema real.

2.1. Representación del modelo matemático

El marco del modelo compartimental es una manera natural que permite la formulación de procesos que poseen entradas y salidas a lo largo del tiempo. Como ejemplo, el compartimento del cultivo de banano (Ver Imagen 4.1) (Nomura *et al.* 2017) después de ser fertilizado con urea, donde básicamente la entrada es la cantidad de nitrógeno suministrada al cultivo por efecto del fertilizante.

Imagen 4.1. Diagrama compartimental para el cultivo de banano



Fuente: Elaboración propia.

Para el ejemplo anterior, la ley de equilibrio establece la relación entre la tasa neta de variación de nitrógeno dentro del cultivo y la diferencia entre la tasa de variación de nitrógeno que entra al cultivo menos la tasa de variación de nitrógeno que sale del cultivo.

Otro ejemplo que se ilustra en las Imágenes 4.2, 4.3, 4.4. establece las relaciones sobre la oxitetraciclina como un antibiótico prescrito en medicina veterinaria para tratar problemas respiratorios, hemoparasitosis, problemas diarreicos, etc (Fedeniuk 1998). Dentro del animal, el fármaco se propaga desde el tracto gastrointestinal hasta el torrente sanguíneo, desde donde es extraído por los riñones, para finalmente ser excretado por la orina. Las Imágenes 4.2, 4.3, 4.4. establecen los compartimentos respectivos para el tracto gastrointestinal, el torrente sanguíneo y los riñones del animal; donde la entrada y la salida es la oxitetraciclina.

La Imagen 4.2 relaciona la tasa de variación de oxitetraciclina en el tracto gastrointestinal igual a la tasa de variación de oxitetraciclina que ingresa en el tracto gastrointestinal menos la tasa de variación de oxitetraciclina que sale del tracto gastrointestinal.

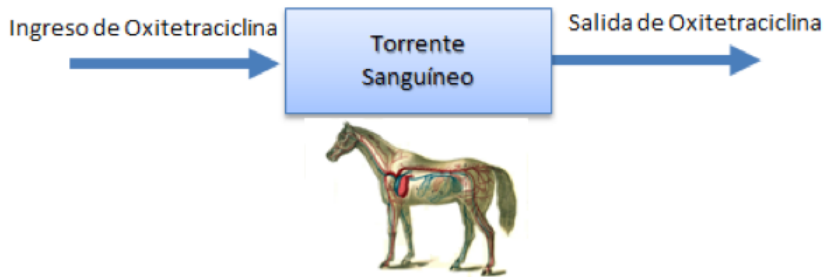
Imagen 4.2. Diagrama compartimental para el tracto intestinal del ganado



Fuente: Elaboración propia.

La tasa de variación de oxitetraciclina en el torrente sanguíneo es igual a la tasa de variación de oxitetraciclina que ingresa en el torrente sanguíneo menos la tasa de variación de oxitetraciclina que sale del torrente sanguíneo.

Imagen 4.3. Diagrama compartimental para el torrente sanguíneo del caballo



Fuente: Elaboración propia.

La tasa de variación de oxitetraciclina en el tracto urinario es igual a la tasa de variación de oxitetraciclina que ingresa al tracto urinario menos la tasa de variación de oxitetraciclina que sale del tracto urinario.

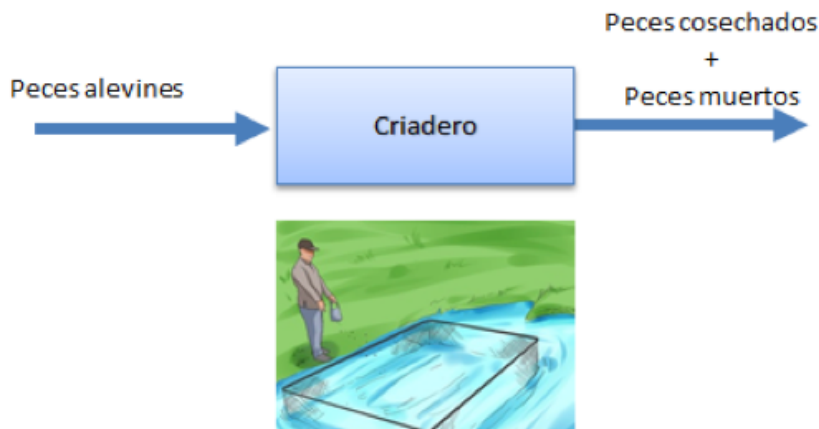
Imagen 4.4. Diagrama compartimental para el tracto urinario



Fuente: Elaboración propia.

Otro ejemplo que merece el análisis compartimental se basa en las dinámicas presentes en los criaderos de peces que representan modelos poblacionales. Los peces se cosechan a una tasa constante por semana, teniendo en cuenta la tasa de mortalidad o aglomeración y la tasa de natalidad per-cápita. De este modo, la Imagen 4.5. ilustra la relación de la tasa de cambio de la población de peces en el criadero como la diferencia entre la tasa de cambio de natalidad de la población de peces menos la tasa de cambio de mortalidad y la tasa de cambio de cosecha.

Imagen 4.5. Diagrama compartimental para el criadero de peces

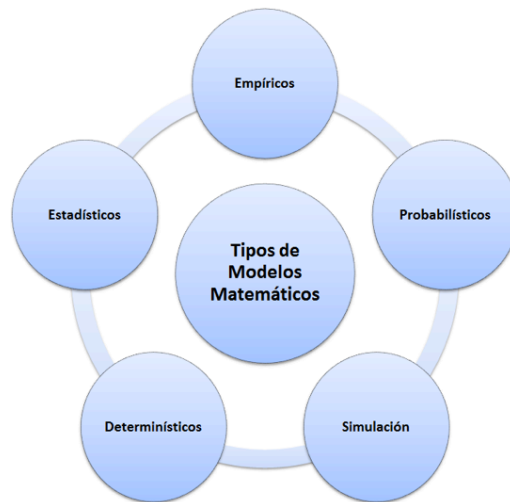


Fuente: Elaboración propia.

2.2. Tipos de modelos matemáticos

Existe un sinnúmero de formas de acercarse a un objeto de estudio a partir de diferentes aproximaciones o tipologías que caracterizan un modelo matemático. La Imagen 4.6. presenta los tipos de modelos matemáticos descritos por (Barnes and Fulford 2011).

Imagen 4.6. Tipos de modelos matemáticos



Fuente: Elaboración propia.

Por un lado, los modelos empíricos son las aproximaciones más básicas porque resultan de ajustar una curva a través de un conjunto de datos con la finalidad de predecir resultados para los cuales no existen datos (Austin et al. 1998). Los modelos poblacionales además de ser ajustados mediante aproximaciones exponenciales, puede recurrir a expresiones polinómicas. La desventaja de esta aproximación es que el modelo no puede extenderse a otros problemas relacionados debido a que está limitado a sus datos de ajuste.

El modelamiento mediante procesos estocásticos o probabilísticos (Bock 1996), estiman la probabilidad de un resultado predecible basado en los datos disponibles. Este tipo de modelamiento permite predecir la incertidumbre del resultado, lo cual es relevante para el estudio de fenómenos

que presentan un alto grado de variabilidad. Estos modelos son de importancia en los modelos de pequeñas poblaciones para la predicción de tasas de reproducción en un intervalo de tiempo.

Los modelos de simulación están vinculados a los programas computacionales que aplican un conjunto de reglas con el fin de generar datos que emulan un resultado real considerando diferentes escenarios (Bagni, Berchi, and Cariello 2002). Usualmente, los ingenieros utilizan estos modelos para la identificación de problemas que podrían surgir durante el uso o elaboración de un dispositivo. Si bien las simulaciones proporcionan modelos muy cercanos a la realidad, no implica necesariamente que sean los mejores modelos, los cuales se caracterizan por su simplicidad.

Los modelos determinísticos ignoran la variación aleatoria y formulan expresiones matemáticas que describen relaciones fundamentales entre las variables del problema (Gurney and Nisbet 1998). Por ejemplo, un modelo poblacional determinístico tiene como propósito la obtención de una ecuación diferencial que relacione las tasas de nacimiento y de mortalidad, con el tamaño de la población en un tiempo determinado.

Los modelos estadísticos se basan en pruebas de hipótesis que permiten categorizar un conjunto de datos empíricos (Montgomery and Runger 2010). Estas categorías se ajustan a determinadas distribuciones particulares asociadas a descriptores estadísticos como la media y la desviación estándar, con la finalidad de predecir resultados futuros. En términos de modelos poblacionales, una especie podría ser evaluada si a una muestra de su población se alimenta con un balanceado de cierto tipo (categoría A), mientras que otra muestra se alimenta con productos orgánicos (categoría B). Los resultados indicarían un porcentaje de margen de error con el que se ha realizado la predicción.

El modelamiento es una herramienta muy útil, así como también; es un marco de referencia para la investigación, el debate y el planeamiento; lo que proporciona una fuente

valiosa de información para la toma de decisiones. En este capítulo de libro, se dará énfasis a los modelos determinísticos representados a través de las ecuaciones diferenciales.

3. Ecuaciones diferenciales

La naturaleza se encuentra sometida a constantes cambios que pueden ser apreciados en diferentes campos de estudio. En la agricultura, se puede observar las variaciones que sufre un cultivo de ciclo corto en su tamaño durante el transcurso del tiempo, así como la variación interna de su cantidad de nitrógeno después de su fertilización. Existen muchos problemas en las ciencias agropecuarias que son formulados matemáticamente para determinar una función desconocida que debe satisfacer cierta ecuación, en la que figuran dicha función y sus derivadas. La ecuación que contiene la función desconocida y varias de sus derivadas, es una ecuación diferencial (Hinrichsen and Pritchard 2005).

La modelación matemática por ecuaciones diferenciales es una aproximación determinística que en la actualidad se ha constituido en la herramienta fundamental para cumplir con los objetivos planteados por muchos investigadores. Su aspiración es comprender el comportamiento de ciertos fenómenos que involucran cambios descritos por ecuaciones que relacionan magnitudes variantes en el tiempo (Greefrath 2011).

Retomando el ejemplo del modelo poblacional, la suposición de que la tasa de crecimiento posee un ritmo proporcional al tamaño de su población resulta razonable para una población de animales en condiciones ideales de ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad ante enfermedades. Si representamos las variables que están relacionadas en este fenómeno, encontramos el tiempo, t , como la variable independiente y al número de habitantes, N , como la variable dependiente. Bajo estas condiciones, la rapidez de crecimiento de la población está descrita por la siguiente ecuación (1)

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

siendo k , la constante de proporcionalidad. La ecuación (1) representa una ecuación diferencial, ya que contiene una función desconocida $N(t)$ que varía con el tiempo, y su derivada $\frac{dN}{dt}$ que representa la rapidez o tasa de crecimiento de la población. De esta manera, una ecuación diferencial está constituida por una función desconocida y algunas de sus derivadas (Zill 2016).

3.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP). Una ecuación diferencial se dice ordinaria (EDO), si la función desconocida es función de una sola variable independiente. La ecuación (2) ilustra un ejemplo a continuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x$$

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP), es aquella cuya función desconocida depende de dos o más variables independientes. La ecuación (3) es un ejemplo de este tipo de ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

3.2. Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial corresponde al orden de la mayor derivada que figura en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación (1) es una ecuación diferencial de primer orden al igual que la ecuación (2). La ecuación (3) representa una ecuación diferencial de segundo orden.

3.3. Solución de una ecuación diferencial

La solución de una ecuación diferencial, está constituida por la expresión algebraica de la función desconocida $y = f(x)$. Esta función satisface la ecuación diferencial de forma idéntica, para todo x dentro del intervalo de interés. Si consideramos a

$$f(x) = c_1 \text{sen}(2x) + c_2 \text{cos}(2x)$$

una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes cualesquiera, la forma de verificar esta solución es la siguiente:

1. Lo primero que debemos obtener es la segunda derivada de la función de la ecuación (4). La primera y segunda derivada de la función solución, son respectivamente

$$\frac{dy}{dx} = 2c_1 \text{cos}(2x) - 2c_2 \text{sen}(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4c_1 \text{sen}(2x) - 4c_2 \text{cos}(2x)$$

2. En segunda instancia, se sustituye en la ecuación (7) en la ecuación diferencial (5), resultando la siguiente identidad:

$$-4c_1 \text{sen}(2x) - 4c_2 \text{cos}(2x) + 4(c_1 \text{sen}(2x) + c_2 \text{cos}(2x)) = 0$$

$$-4c_1 \text{sen}(2x) - 4c_2 \text{cos}(2x) + 4c_1 \text{sen}(2x) + 4c_2 \text{cos}(2x) = 0$$

3.4. Ecuaciones diferenciales separables de primer orden

La solución general para este tipo de ecuación está dada por la siguiente expresión

$$F(x)dx + G(y)dy = 0$$

A continuación, se aplica las técnicas de integración de la siguiente manera

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = c$$

donde c es una constante arbitraria. La solución con valores iniciales se puede obtener a partir de la condición inicial $y(x_0)=y_0$, con la siguiente expresión matemática:

$$\int_{x_0}^x F(x)dx + \int_{y_0}^y G(y)dy = 0$$

Un ejemplo se puede ilustrar a través de la ecuación diferencial descrita a continuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^x}{2y}$$

Esta expresión se puede reescribir de la forma señalada en la ecuación (8) aplicando el principio de separación de variables

$$2ydy - xe^x dx = 0$$

Aplicando el operador integración al lado izquierdo de la ecuación (12), se obtiene la solución en la ecuación (13)

$$\begin{aligned} \int 2ydy - \int xe^x dx &= c \\ y^2 - xe^x + e^x &= c \\ y^2 &= xe^x - e^x + c \end{aligned}$$

- La ecuación diferencial (11) puede ser resuelta mediante la utilización de lenguajes de programación como MATLAB (San Martín Cuenca and Tusa Jumbo 2015). La Imagen 4.7. presenta el código implementado en MATLAB

para la resolución de la ecuación (11). El comando *ode45* (Bober 2013; Quarteroni, Saleri, and Gervasio 2014) implementa el método numérico de Runge-Kutta (Runge 1895; Kutta 1901) con un paso de tiempo variable con la finalidad de realizar un cálculo eficiente. El comando se expresa a continuación con los siguientes parámetros

$$[x,y] = \text{ode45}(@fname, xspan, y0)$$

- *fname* es el nombre de la función. En la Imagen 4.7., la función se llama *f*.
- *xspan* es el vector que define el límite inicial y final de la integración.
- *y0* es el vector de condiciones iniciales.
- *x* es el valor de la variable independiente en la que se calcula el vector de soluciones *y*. Este vector no es necesariamente igual a *xspan* porque *ode45* genera pasos más pequeños cuando el problema cambia rápidamente y pasos más grandes cuando es relativamente constante.
- *y* es el vector solución

La Imagen 4.8. presenta la gráfica de la solución de la ecuación diferencial (11) utilizando el comando *plot(x,y)*.

Imagen 4.7. Implementación de la ecuación diferencial (11) en MATLAB

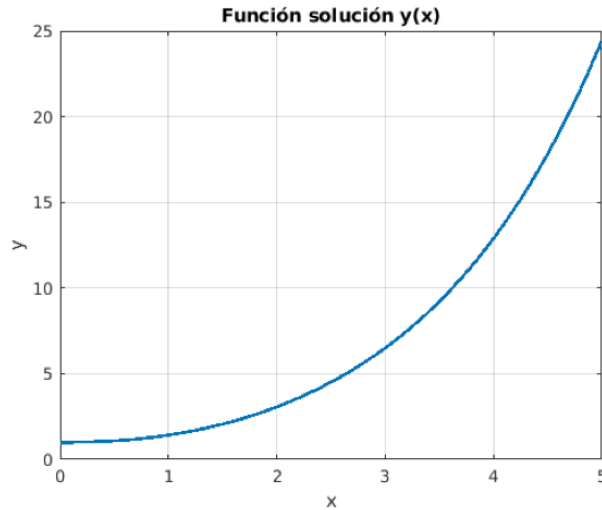
```
N = 100;           % Número de puntos
x0 = 0;           % Condición inicial en x
y0 = 1;           % Condición inicial en y
xmax = 5;         % Ancho de la ventana
x = linspace(0,1,N); % Dominio de la función

% Ecuación diferencial
f = @(x,y) [x*exp(x)/(2*y)];
% Comando para resolver ecuaciones diferenciales
[xsol, ysol] = ode45(f, [x0,xmax], y0);

% Comandos de graficación de la función solución
plot(xsol, ysol, 'LineWidth',2)
grid on;
title('Función solución y(x)')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Fuente: Elaboración propia.

Imagen 4.8. Gráfica de la solución de la ecuación diferencial (11) en MATLAB



Fuente: Elaboración propia.

3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Si se retoma el ejemplo de la oxitetraciclina suministrada como medicamento veterinario, se puede considerar las constantes de proporcionalidad que se asocian con las tasas a las que se difunde la tetraciclina desde el tracto gastrointestinal hasta el torrente sanguíneo para luego ser eliminada por la orina. Los valores son de 0.72 mg/h y 0.15 mg/h respectivamente, suponiendo que la cantidad inicial de oxitetraciclina en el tracto gastrointestinal es 10 mg, y no hay antibiótico en el torrente sanguíneo y el tracto urinario.

Se asume que $x(t)$ representa la cantidad de oxitetraciclina en el tracto intestinal, mientras que $y(t)$ representa la cantidad del mismo medicamento en el torrente sanguíneo; ambas como funciones del tiempo.

Si consideramos que la cantidad de oxitetraciclina que sale del tracto gastrointestinal es proporcional a la concentración de medicamento, se procede a plantear el siguiente modelo

$$\frac{dx}{dt} = -k_1x$$

La cantidad de medicamento presente en el torrente sanguíneo está dada por

$$\frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y$$

donde k_1 y k_2 son las constantes de proporcionalidad dadas por 0.72 mg/h y 0.15 mg/h, respectivamente. Las condiciones iniciales a considerarse son $x(0)=10$ mg y $y(0)=0$ mg. La ecuación diferencial (14) puede reescribirse de la forma dada por la ecuación (8)

$$\frac{1}{x}dx + k_1dt = 0$$

Aplicando el operador integración al lado izquierdo de la ecuación (16), se obtiene la solución general en la ecuación (17)

$$\int \frac{1}{x}dx + \int k_1dt = c$$

$$\ln(x) + k_1t = c$$

De la ecuación (17), se despeja solución general, $x(t)$, de la ecuación diferencial (14)

$$e^{\ln(x)+k_1t} = e^c$$

$$xe^{k_1t} = c_0$$

$$x(t) = c_0e^{-k_1t}$$

Reemplazando la condición inicial $x(0)=10$ mg en la solución general, obtenemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$x(t) = 10e^{-k_1t}$$

Ahora, se procede a reemplazar la función $x(t)$ en la ecuación diferencial (15)

$$\frac{dy}{dt} = 10k_1e^{-k_1t} - k_2y$$

$$\frac{dy}{dt} + k_2y = 10k_1e^{-k_1t}$$

La ecuación (20) posee la forma de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven calculando el factor integrante

$$R(t) = e^{\int p(t)dt}$$

de modo que la ecuación diferencial puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} (R(t)y(t)) = R(t)q(t)$$

El factor integrante de la ecuación diferencial (20) está dada por la siguiente expresión

$$R(t) = e^{\int k_2 dt} = e^{k_2 t}$$

Se reescribe la ecuación (20) de la forma expresada en la ecuación (23)

$$\frac{d}{dt} (e^{k_2 t} y(t)) = e^{k_2 t} 10k_1 e^{-k_1 t}$$

Se aplica la operación de integración a ambos lados de la ecuación (25)

$$\int \frac{d}{dt} (e^{k_2 t} y(t)) dt = \int 10k_1 e^{(k_2 - k_1)t} dt$$
$$e^{k_2 t} y(t) = \frac{10k_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + c$$

Se despeja la solución general $y(t)$ de la siguiente forma

$$y(t) = \frac{10k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c e^{-k_2 t}$$

Se reemplaza la condición inicial $y(0)=0$ mg para obtener el valor de la constante c

$$c = -\frac{10k_1}{k_2 - k_1}$$

Finalmente, la solución particular de la ecuación diferencial (20) se presenta a continuación

$$y(t) = \frac{10k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} + e^{-k_2 t})$$

Cabe señalar, que la ecuación diferencial (14) resuelta por separación de variables, es una ecuación diferencial lineal de primer orden y puede resolverse calculando el factor integrante. La Imagen 4.9. presenta el código en MATLAB para la resolución de las ecuaciones diferenciales (14) y (15), mientras la Imagen 4.10., presenta las gráficas de las curvas resultantes.

Imagen 4.9. Implementación de las ecuaciones diferenciales (14) y (15) en MATLAB

```

k1 = 0.72;           % Constante de proporcionalidad 1
k2 = 0.15;          % Constante de proporcionalidad 2
N = 1000;           % Número de puntos
t0 = 0;             % Condición inicial en t
x0 = 10;            % Condición inicial en x
y0 = 0;             % Condición inicial en y
tmax = 30;          % Ancho de la ventana
t = linspace(0,1,N); % Dominio de la función

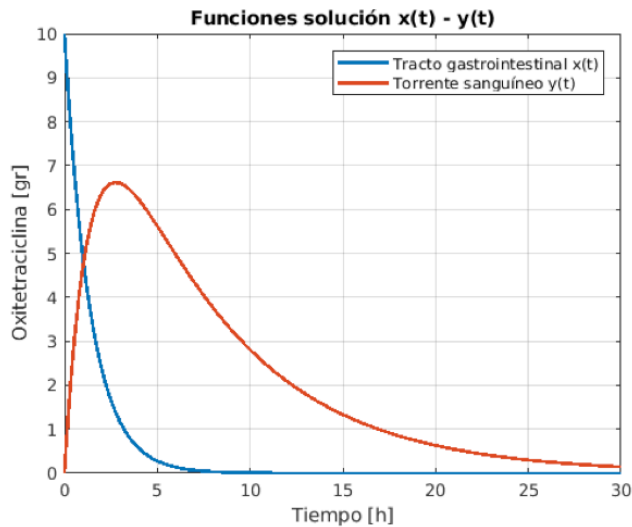
% Ecuaciones diferenciales
f = @(t,x) [-k1*x(1);k1*x(1)-k2*x(2)];
% Comando para resolver ecuaciones diferenciales
[tsol, xsol] = ode45(f, [t0,tmax], [x0, y0]);

% Comandos de graficación de la función solución
plot(tsol,xsol(:,1),tsol,xsol(:,2),'LineWidth',2)
grid on;
title('Funciones solución x(t) - y(t)')
xlabel('Tiempo [h]')
ylabel('Oxitetraciclina [gr]')
legend('Tracto gastrointestinal x(t)', 'Torrente sanguíneo y(t)')

```

Fuente: Elaboración propia.

Imagen 4.10. Gráfica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales (14) y (15) en MATLAB



Fuente: Elaboración propia.

De la Imagen 4.10. se desprenden algunas observaciones. Primero, las curvas soluciones responden al comportamiento de combinaciones lineales de funciones exponenciales decrecientes. Segundo, la función que representa la cantidad de oxitetraciclina en el tracto gastrointestinal, $x(t)$, muestra que los 10 gr del medicamento han sido consumidos en alrededor de 7 horas. Esta estimación brinda una información puntual sobre la frecuencia con la cual se debe suministrar el medicamento. Tercero, la cantidad de oxitetraciclina en el torrente sanguíneo, $y(t)$, alcanza un valor máximo de 6.5 gr después de alrededor de 4 horas. Posteriormente, la cantidad del medicamento desaparece del torrente sanguíneo en alrededor de 30 horas. Cabe señalar que la cantidad de oxitetraciclina en el tracto gastrointestinal y en el torrente sanguíneo llegan a ser iguales a 4.7 gr, aproximadamente, después de alrededor de una hora que el medicamento ha ejercido su acción sobre el organismo del animal.

3.6. Ecuaciones diferenciales no lineales

Una ecuación diferencial ordinaria es no lineal cuando posee funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, como por ejemplo; $\text{sen}(y)$ o ey' que no pueden estar presentes en una ecuación lineal, como por ejemplo:

$$(1 - y)y' + 2y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen}(y) = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

La ecuación diferencial (11) que se resolvió analíticamente por separación de variables, posee términos no lineales. Sin embargo, no todas las ecuaciones diferenciales no lineales poseen un método analítico único para su resolución. Retomando el ejemplo de los criaderos de peces que representan modelos poblacionales (Borrelli and Coleman 1998), una

buena aproximación está dada por la ecuación diferencial ordinaria descrita a continuación

$$\frac{dy}{dt} = k_1y - k_2y^2 - k_3$$

donde k_1 es una constante de proporcionalidad a la tasa de cambio de la población, k_2 describe la tasa de aglomeración, k_3 representa la tasa de cosecha y la condición inicial es $y(x_0) = y_0$. Si se asume que no existe aglomeración, $k_2 = 0$, la ecuación (33) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = k_1y - k_3$$

Esta ecuación diferencial se resuelve mediante factor integrante como sigue

$$R(t) = e^{\int -k_1 dt} = e^{-k_1 t}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial y reescribiendo los términos del lado izquierdo, se obtiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt} (y(t)e^{-k_1 t}) = -e^{-k_1 t} k_3$$

Se integra ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{d}{dt} (y(t)e^{-k_1 t}) dt = \int -e^{-k_1 t} k_3 dt$$

La solución general está dada por la ecuación (38)

$$y(t)e^{-k_1t} = \frac{k_3}{k_1}e^{-k_1t} + c$$
$$y(t) = \frac{k_3}{k_1} + ce^{k_1t}$$

Reemplazado la condición inicial $y(0)=y_0$, se obtiene una solución particular

$$y(t) = \frac{k_3}{k_1} + \left(y_0 - \frac{k_3}{k_1} \right) e^{k_1t}$$

Otro caso interesante, es cuando se elimina el término de la cosecha, $k_3=0$, y se mantiene el término que describe la aglomeración, de modo que la ecuación diferencial (33) resulta en una ecuación diferencial no lineal como sigue a continuación

$$\frac{dy}{dt} = k_1y - k_2y^2$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver claramente mediante separación de variables

$$\frac{dy}{k_1y - k_2y^2} = dt$$

Si se integra ambos lados de la ecuación, se obtiene la siguiente expresión

$$\int \frac{dy}{y(k_1 - k_2y)} = \int dt$$

Se aplica la integración de fracciones parciales en el lado izquierdo de la ecuación diferencial (42) y la solución general se aprecia en la ecuación (43)

$$\int \frac{1}{k_1 y} dy + \int \frac{k_2}{k_1(k_1 - k_2 y)} dy = \int dt$$

$$\frac{1}{k_1} \ln(y) - \frac{1}{k_1} \ln(k_1 - k_2 y) = t + c$$

$$\frac{1}{k_1} \ln \left(\frac{y}{k_1 - k_2 y} \right) = t + c$$

$$y(t) = \frac{k_1 e^{k_1(t+c)}}{1 + k_2 e^{k_1(t+c)}}$$

Reemplazado la condición inicial $y(0)=y_0$, se obtiene el valor de la constante c descrito a continuación

$$c = \frac{1}{k_1} \ln \left(\frac{y_0}{k_1 - k_2 y_0} \right)$$

Y la ecuación (45) representa una solución particular de la ecuación diferencial

$$y(t) = \frac{k_1 y_0 e^{k_1 t}}{k_1 - k_2 y_0 (e^{k_1 t} - 1)}$$

La Imagen 4.11. presenta la implementación de la ecuación diferencial (33) que no ha sido desarrollada analíticamente, utilizando el lenguaje de programación en MATLAB para su resolución. La Imagen 4.12. presenta los dos casos particulares que se han descrito previamente y el modelo poblacional completo.

Imagen 4.11. Implementación de las ecuaciones diferenciales (33), (34) y (40) en MATLAB

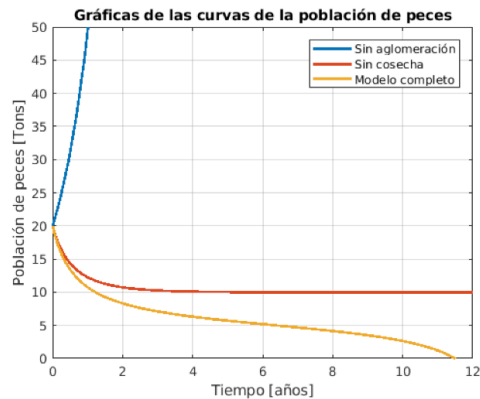
```

k1 = 1;           % Constante de proporcionalidad 1
k2 = 1/10;       % Constante de proporcionalidad 2
k3 = 3;          % Constante de proporcionalidad 3
N = 1000;        % Número de puntos
t0 = 0;          % Condición inicial en t
y0 = 20;         % Condición inicial en y
tmax = 12;       % Ancho de la ventana
t = linspace(0,1,N); % Dominio de la función
% Ecuaciones diferenciales
yd1 = @(t,y) [k1*y-k3];
yd2 = @(t,y) [k1*y-k2*y.^2];
yd3 = @(t,y) [k1.*y-k2*y.^2-k3];
% Comando para resolver ecuaciones diferenciales
[t1, y1] = ode45(yd1, [t0,tmax], y0);
[t2, y2] = ode45(yd2, [t0,tmax], y0);
[t3, y3] = ode45(yd3, [t0,tmax], y0);
% Comandos de graficación de la función solución
plot(t1,y1,t2,y2,t3,y3,'LineWidth',2)
axis([0 tmax 0 50])
grid on;
title('Gráficas de las curvas de la población de peces')
xlabel('Tiempo [años]')
ylabel('Población de peces [Tons]')
legend('Sin aglomeración','Sin cosecha','Modelo completo')

```

Fuente: Elaboración propia.

Imagen 4.12. Gráfica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales (33), (34) y (40) en MATLAB



Fuente: Elaboración propia.

La Imagen 4.12. presenta la curva del modelo matemático que omite el término que describe la aglomeración: $k_1=1$, $k_2=0$ y $k_3=3$. Este modelo se dispara exponencialmente alcanzando una población de peces de 50 toneladas en menos de un año, partiendo de que inicialmente existían 20 toneladas. Este modelo describe una situación de recursos pesqueros ilimitados que está lejos de nuestra realidad. Bajo la misma condición inicial, la curva que omite el término de cosecha de peces, $k_1=1$, $k_2=0.1$ y $k_3=0$; tiende a mostrar un comportamiento de decrecimiento poblacional, alcanzando un valor estable de 10 toneladas de peces a partir de los 3 años en adelante. Cuando se considera el modelo completo con los efectos de aglomeración y cosecha, $k_1=1$, $k_2=0.1$ y $k_3=3$; se aprecia un decrecimiento más rápido de la población de peces llegando a una desaparición de estos recursos marinos al cabo de 11 años. Este último modelo matemático aproxima de mejor manera, una realidad de recursos marinos limitados que debe ser considerada por la pequeña y mediana industria pesquera.

4. Conclusiones

Se ha presentado detalladamente un enfoque matemático - conceptual a través del cual, se pueden ilustrar soluciones analíticas, gráficas y computacionales; de un pequeño grupo de problemas presentes en el campo de las ciencias agropecuarias. Los modelos determinísticos ofrecen una aproximación simple que permite la comprensión general de los elementos esenciales que actúan en el problema mediante el establecimiento de relaciones entre variables. Las ecuaciones diferenciales resuelven problemas que poseen comportamientos dinámicos implícitos en su naturaleza cambiante en el tiempo. Se han abordado principalmente ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, tanto lineales como no lineales. El lector puede validar sus resultados a través del programa MATLAB que implementa diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. De esta manera, se brinda herramientas matemáticas importantes para la consolidación de una investigación portadora de una profunda fundamentación científica que orienten la modelización de los objetos de estudio en diferentes áreas profesionales.

Referencia Bibliográfica

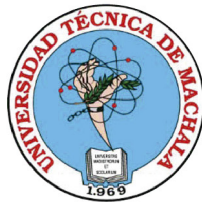
- Austin, E. J., J. Willock, I. J. Deary, G. J. Gibson, J. B. Dent, G. Edwards-Jones, O. Morgan, R. Grieve, and A. Sutherland. 1998. "Empirical Models of Farmer Behaviour Using Psychological, Social and Economic Variables. Part I: Linear Modelling." *Agricultural Systems* 58 (2): 203-24.
- Bagni, Raul, Roberto Berchi, and Pasquale Cariello. 2002. "A Comparison of Simulation Models Applied to Epidemics." *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 5 (3). <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/5.html>.
- Barnes, B., and G. R. Fulford. 2011. *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach Using Maple and MATLAB, Second Edition*. CRC Press.
- Bober, William. 2013. *Introduction to Numerical and Analytical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists*. CRC Press.
- Bock, Hans H. 1996. "Probabilistic Models in Cluster Analysis." *Computational Statistics & Data Analysis* 23 (1): 5-28.
- Borrelli, Robert L., and Courtney S. Coleman. 1998. "Differential Equations: A Modeling Perspective." John Wiley and Sons. <http://www.sidalc.net/cgi-bin/wxis.exe/?IsisScript=uccma.xis&method=post&formato=2&cantidad=1&expresion=mfn=002946>.
- Fedeniuk, Ricky Wayne. 1998. "Oxytetracycline Degradation in Model Meat Processing Systems." <http://ecommons.usask.ca/handle/10388/etd-10212004-001432>.
- Fishwick, Paul A. 2007. *Handbook of Dynamic System Modeling*. CRC Press.
- Fowler, A. C., and Anna C. Fowler. 1997. *Mathematical Models in the Applied Sciences*. Cambridge University Press.
- Greefrath, Gilbert. 2011. "Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling - Overview." In *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, edited by Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, and Gloria Stillman, 1:301-4. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Gurney, William, and R. M. Nisbet. 1998. *Ecological Dynamics*. Oxford University Press.

- Hinrichsen, Diederich, and Anthony J. Pritchard. 2005. *Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Vol. 48. Springer Berlin.
- Kutta, W. 1901. "Beitrag Zur Näherungsweise Integration Totaler Differentialgleichungen." <http://www.citeulike.org/group/1448/article/813805>.
- Montgomery, Douglas C., and George C. Runger. 2010. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley & Sons.
- Moore, Holly. 2014. *MATLAB for Engineers*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press.
- Nomura, Edson Shigueaki, Francine Lorena Cuquel, Erval Rafael Damatto Junior, Eduardo Jun Fuzitani, and Ana Lúcia Borges. 2017. "Fertilization with Nitrogen and Potassium in Banana Cultivars 'Grand Naine', 'FHIA 17' and 'Nanicão IAC 2001' Cultivated in Ribeira Valley, São Paulo State, Brazil." *Acta Scientiarum. Agronomy* 39 (4): 505-13.
- Quarteroni, Alfio, Fausto Saleri, and Paola Gervasio. 2014. *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Springer Science & Business Media.
- Runge, Carl. 1895. "Über Die Numerische Auflösung von Differentialgleichungen." *Mathematische Annalen* 46 (2). Springer: 167-78.
- San Martín Cuenca, Hugo Dennys, and Eduardo Alejandro Tusa Jumbo. 2015. "Fundamentos de Programación Para Ciencias E Ingeniería." Machala: Ecuador. <http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/6748>.
- Zill, Dennis G. 2016. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Nelson Education.

Análisis de Datos Agropecuarios
Edición digital 2017- 2018.
www.utmachala.edu.ec

Redes

Redes es la materialización del diálogo académico y propositivo entre investigadores de la UTMACH y de otras universidades iberoamericanas, que busca ofrecer respuestas glocalizadas a los requerimientos sociales y científicos. Los diversos textos de esta colección, tienen un espíritu crítico, constructivo y colaborativo. Ellos plasman alternativas novedosas para resignificar la pertinencia de nuestra investigación. Desde las ciencias experimentales hasta las artes y humanidades, Redes sintetiza policromías conceptuales que nos recuerdan, de forma empeñosa, la complejidad de los objetos construidos y la creatividad de sus autores para tratar temas de acalorada actualidad y de demanda creciente; por ello, cada interrogante y respuesta que se encierra en estas líneas, forman una trama que, sin lugar a dudas, inervará su sistema cognitivo, convirtiéndolo en un nodo de esta urdimbre de saberes.



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA

Editorial UTMACH

Km. 5 1/2 Vía Machala Pasaje

www.investigacion.utmachala.edu.ec / www.utmachala.edu.ec

ISBN: 978-9942-24-120-7



9 789942 241207